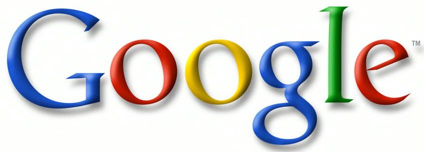
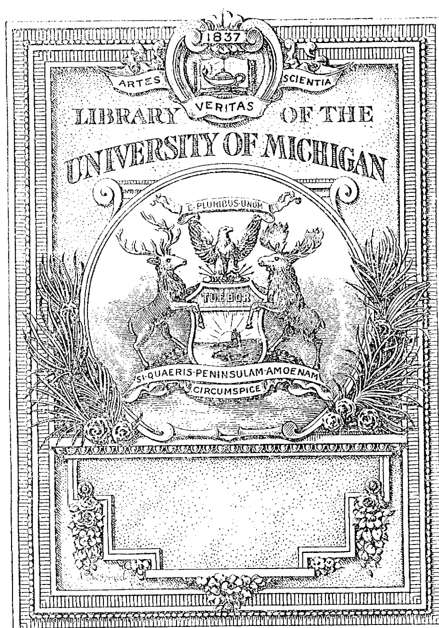



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

Leçons

de

Trigonométrie rectiligne

COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

publié sous la direction

de M. DARBOUX

Doyen de la Faculté des Sciences de Paris.

Leçons d'Arithmétique théorique et pratique, par M. JULES TANNERY, sous-directeur des études scientifiques à l'École normale supérieure. 1 vol. in-8°, broché .... 5 »

Leçons de Cosmographie, par MM. TISSERAND, membre de l'Institut, directeur de l'Observatoire de Paris, et H. ANDOYER, maître de conférences à la Faculté des sciences de l'Université de Paris. 1 vol. in-8°, broché .... 6 »

Leçons d'Algèbre élémentaire, par M. C. BOURLET, docteur ès sciences, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, 1 vol. in-8°, broché 7 50

Leçons de Géométrie élémentaire (*Géométrie plane*), par M. HADAMARD, maître de conférences à la Faculté des sciences de l'Université de Paris, professeur suppléant au Collège de France. 1 vol. in-8°, broché .... 6 »

Leçons de Trigonométrie rectiligne, par M. C. BOURLET, docteur ès sciences, professeur de Mathématiques au lycée Saint-Louis. 1 volume in-8°, broché .... 6 »

Traité d'Algèbre élémentaire (*classe de Première-sciences*), par M. DE CAMPOU, ancien élève de l'École normale supérieure, professeur au collège Rollin. 1 volume in-8°, broché .... 5 »

Traité élémentaire de Géométrie descriptive (*Enseignement secondaire moderne*), par M. DESPORTES, censeur au lycée de Toulouse. 1 vol. gr. in-8°, broché .... 10 »

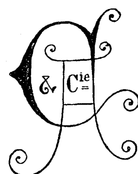
Paris. — Imp. E. CAPIOMONT et Cie, rue des Poitevins, 6.

Cours complet de Mathématiques élémentaires
Publié sous la direction de **M. DARBOUX**, doyen de la Faculté des Sciences de Paris.

Leçons de Trigonométrie rectiligne

PAR

C. Bourlet
Docteur ès sciences, Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis.



PARIS
Armand Colin & Cie, Éditeurs
5, rue de Mézières, 5

1898

AVERTISSEMENT

Les trois premiers Livres de ces *Leçons de Trigonométrie rectiligne* contiennent les matières du programme de la classe de Mathématiques élémentaires.

L'Appendice renferme tous les compléments nécessaires aux élèves de la classe de Mathématiques spéciales.

Ainsi, ce volume pourra servir à un élève dans tout le cours de ses études.

C. BOURLET.

TABLE DES MATIÈRES

LIVRE II

TABLES. — ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

LIVRE III

RÉSOLUTION DES TRIANGLES

APPENDICE

Paris. — Imp. E. CAPIOMONT et Cie, rue des Poitevins, 6.

INTRODUCTION

SEGMENTS. — PROJECTIONS

1. Définitions. — On appelle *vecteur* ou encore *segment* une portion de droite sur laquelle un sens est défini. Pour déterminer le *sens* du segment on distingue les deux points qui le limitent. L'un de ces points est appelé *origine* et l'autre *extrémité*. Le *sens* du segment est, alors, le *sens dans lequel se déplace un mobile qui parcourt le segment en allant de l'origine vers l'extrémité*.

On énonce un vecteur en énonçant d'abord l'origine et, ensuite, l'extrémité. De plus, pour éviter toute confusion, nous placerons, dans l'écriture, les deux lettres entre parenthèses. Ainsi, le vecteur (AB) est celui qui a pour origine A et pour extrémité B.

Il résulte, de la définition précédente, que l'on peut distinguer dans un vecteur trois choses :

1° Sa *ligne d'action*, qui est la droite indéfinie qui le porte ;

2° Sa *longueur*, qui est la distance (géométrique) de l'origine à l'extrémité ;

3° Son *sens*, qui est celui dans lequel se déplace un mobile allant de l'origine vers l'extrémité.

Deux vecteurs sont dits *équipollents* s'ils ont leurs lignes d'action parallèles ou confondues, même longueur et même sens.

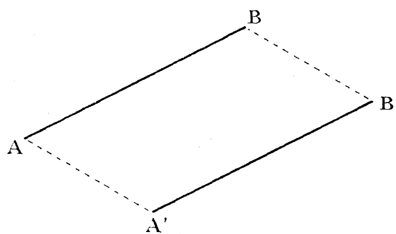


Fig. 1.

On peut remarquer, de suite, que si deux vecteurs (AB) et (A'B') sont équipollents, sans avoir même ligne d'action, la figure ABB'A' (*fig.* 1) est un parallélogramme puisque les côtés opposés sont égaux et parallèles.

Pour écrire que deux vecteurs sont équipollents nous nous servirons du signe ordinaire de l'égalité. Ainsi, l'égalité

$$(AB) = (A'B')$$

signifie : vecteur (AB) équipollent au vecteur (A'B').

2. Résultante. — Étant donnés plusieurs vecteurs (AA'), (BB'), (CC'), (DD'), on appelle *résultante* ou encore *somme géométrique* de ces vecteurs le segment construit de la façon suivante. D'un point arbitraire o de l'espace (*fig.* 2), pris pour origine, on trace un vecteur (oa) équipollent à (AA'); puis, avec a comme nouvelle origine, on trace un vecteur (ab) équipollent à (BB'). On construit,

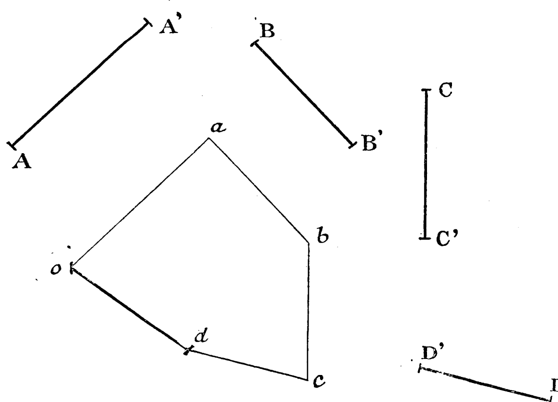


Fig. 2.

de même, le vecteur (bc) équipollent à (CC'); et enfin le vecteur (cd) équipollent à (DD'). Le vecteur (od), ayant pour origine o, l'origine du premier vecteur, et pour extrémité d, l'extrémité du dernier vecteur (ou tout vecteur équipollent à (od), est ce qu'on appelle la *résultante* ou encore la *somme géométrique* des vecteurs proposés.

Il faut remarquer de suite que, le point o étant arbitraire, la définition précédente ne définit la résultante qu'à l'origine près. En d'autres termes, il y a une infinité de segments, tous équipollents entre eux, que nous nommons résultante des vecteurs proposés.

Pour indiquer qu'un vecteur est la somme géométrique de plusieurs autres, on emploie le signe habituel de l'addition. Ainsi, on écrira :

$$(od) = (AA') + (BB') + (CC') + (DD').$$

Remarque. — Dans le cas particulier de deux vecteurs on peut encore construire la résultante de la façon suivante : soient (AA′), (BB′) les deux vecteurs ; par un point arbitraire o de l'espace, pris pour origine, on trace deux segments (oa), (ob) respectivement équipollents aux deux vecteurs donnés. La diagonale (oc) du parallélogramme $oacb$ construit sur (oa) et (ob) est la résultante cherchée, car on a (*fig.* 3) :

$$(ac) = (ob) = (\mathrm{BB}'),$$

et ceci prouve que (oc) s'obtient bien par la construction précédente en portant bout à bout les segments (oa) et (ac) respectivement équipollents à (AA′) et (BB′).

Fig. 3.

On voit, de plus, que la résultante des deux vecteurs ne dépend pas de l'ordre dans lequel on prend ces deux vecteurs pour construire la somme, car, dans la figure 3, on a, par définition, à la fois,

$$(oc) = (oa) + (ac) = (\mathrm{AA}') + (\mathrm{BB}')$$

et

$$(oc) = (ob) + (bc) = (\mathrm{BB}') + (\mathrm{AA}').$$

On conclurait de là aisément que, dans une somme géométrique quelconque, on peut intervertir l'ordre des termes sans modifier la somme. Il suffit pour cela de montrer qu'on peut intervertir deux vecteurs consécutifs [1].

Nous ne développerons pas ici ce point, ni les propriétés générales des sommes géométriques qui ne nous seront pas utiles dans la suite, mais qui sont d'ailleurs identiques à celles des sommes algébriques.

3. Segments portés par un axe. — Définitions. — On appelle *axe* une droite indéfinie sur laquelle un sens de parcours a été

(1) Les démonstrations précédentes ne s'appliquent plus lorsque les vecteurs que l'on compose ont des lignes d'action parallèles, car, alors, les quatre points o, a, b, c sont en ligne droite. L'étude de ce cas particulier fait l'objet de l'*Introduction* de mes *Leçons d'algèbre élémentaire*, nos 1 à 3, auxquelles je renvoie le lecteur.

choisi, sens que l'on nomme *sens positif* de l'axe ; le sens contraire au sens positif est dit *sens négatif*.

On a défini en algèbre ce qu'on appelle la *mesure algébrique* d'un segment porté par un axe ; nous rappellerons ici cette définition et les propriétés essentielles de ces segments [1].

Étant donné un *segment porté par un axe*, c'est-à-dire un segment ayant cet axe pour ligne d'action, on appelle *mesure algébrique* de ce segment le nombre qui a pour valeur absolue la longueur du segment et pour signe le signe (+) ou (—), suivant que le sens du segment est le sens positif ou le sens négatif de l'axe.

Pour désigner la mesure algébrique d'un segment, nous tracerons, au-dessus des deux lettres qui désignent le segment, un trait horizontal. Ainsi, $\overline{AB}$ désigne la mesure algébrique du segment (AB).

Remarque. — Il résulte de cette définition que les mesures algébriques de deux segments égaux et de sens contraires, portés par un même axe, sont des nombres égaux et de signes contraires. Ainsi, $\overline{AB}$ et $\overline{BA}$ sont deux nombres égaux et de signes contraires. On a, par suite,

$$\overline{AB} + \overline{BA} = 0.$$

4. Théorème. — *La mesure algébrique de la résultante de plusieurs segments, portés par un même axe, est égale à la somme des mesures algébriques de ces segments.*

Pour démontrer la proposition, nous pouvons toujours supposer les segments placés bout à bout puisque, pour former leur résultante, on les place ainsi.

1° Prenons d'abord le cas de deux segments (AB) et (BC), dont la résultante est (AC) [2].

Si les deux segments sont de même sens, leurs mesures algébriques $\overline{AB}$ et $\overline{BC}$ sont de même signe. La valeur absolue de la somme $\overline{AB} + \overline{BC}$ est donc égale à la somme AB + BC des valeurs absolues ; et le signe de cette somme est le signe commun des deux termes. D'autre part, le point B étant entre A et C, on a :

$$AC = AB + BC\,;$$

ce qui prouve que la valeur absolue de la mesure algébrique de la résultante (AC) est égale à la valeur absolue de $\overline{AB} + \overline{BC}$. D'ailleurs,

(1) Les n°s 3, 4, 5 ne sont que la reproduction textuelle des n°s 7 et 23 de mes *Leçons d'algèbre élémentaire*.

(2) Je ne fais, dans cette démonstration, intentionnellement, aucune figure pour bien montrer que la démonstration est générale. Le lecteur fera bien, pour suivre plus aisément le raisonnement, de faire lui-même la figure.

comme cette résultante est de même sens que les deux segments, sa mesure algébrique $\overline{AC}$ a même signe que $\overline{AB}$ et $\overline{BC}$, c'est-à-dire que $\overline{AB} + \overline{BC}$. On a donc bien :

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC},$$

puisque les deux membres ont même valeur absolue et même signe.

Si les deux segments sont de sens contraires, puisque la résultante ne change pas quand on change l'ordre des deux segments et que la somme de deux nombres est indépendante de l'ordre de ces deux nombres, nous pouvons toujours supposer que (AB) est celui des deux segments qui a la plus grande longueur. Les mesures algébriques des deux segments $\overline{AB}$ et $\overline{BC}$ étant de signes contraires, et puisque AB > BC, la valeur absolue de la somme $\overline{AB} + \overline{BC}$ est AB — BC et son signe celui de $\overline{AB}$. D'autre part, le point C tombant entre A et B, on a :

$$AC = AB - BC,$$

ce qui prouve que la valeur absolue de $\overline{AC}$ est aussi égale à AB — BC. D'ailleurs, la résultante étant de même sens que le segment (AB), $\overline{AC}$ est aussi de même signe que $\overline{AB}$, on a donc, encore,

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}.$$

Dans le cas particulier où les deux segments sont égaux et de sens contraires, leur résultante est nulle ; mais alors leurs mesures algébriques sont égales et de signes contraires, et ont aussi une somme nulle.

2° Le théorème, étant vrai pour le cas de deux segments, s'étend, facilement, au cas de plusieurs segments.

Soient S_1, S_2, S_3, S_4, quatre segments, et s_1, s_2, s_3, s_4 leurs mesures algébriques. Soit R_1 la résultante de S_1 et S_2, et r_1 sa mesure algébrique ; R_2 la résultante de R_1 et de S_3, et r_2 sa mesure algébrique ; R la résultante de R_2 et S_4, et r sa mesure algébrique. R est la résultante des quatre segments. Or, d'après la première partie de la démonstration, on a les égalités

$$r_1 = s_1 + s_2, \qquad r_2 = r_1 + s_3, \qquad r = r_2 + s_4\,;$$

r est donc le nombre obtenu en faisant la somme de s_1 et s_2, en

ajoutant s_3 au résultat r_1, et en ajoutant s_4 au nouveau résultat r_2. Donc, par définition de la somme, on a :

$$r = s_1 + s_2 + s_3 + s_4,$$

ce qui démontre le théorème.

5. Théorème (*de Chasles*). — *Soient* A, B, C, D, E, *plusieurs points situés sur un axe, on a, entre les mesures algébriques des segments suivants, déterminés par ces points, la relation*

$$(3) \qquad \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EA} = 0.$$

Cette proposition est une conséquence immédiate de la précédente; car le segment (AE) est la résultante des segments (AB), (BC), (CD), (DE) et l'on a

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} = \overline{AE}.$$

Ajoutons aux deux membres de cette égalité $\overline{EA}$ et, en remarquant que

$$\overline{AE} + \overline{EA} = 0,$$

on obtient l'égalité (3).

Remarque. — Ce théorème très important s'applique fréquemment pour trois points. Soient O, A, B trois points situés sur un axe, on a :

$$\overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BO} = 0,$$

d'où l'on peut tirer

$$\overline{AB} = -\overline{BO} - \overline{OA}.$$

Or, en remarquant que

$$-\overline{BO} = \overline{OB},$$

ceci s'écrit

$$(4) \qquad \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA},$$

qui est une forme très usitée de la relation.

6. Projections. — Définitions. — Étant donnés un *axe xx'* et un plan P, non parallèle à cet axe, appelé *plan directeur* de la projection, on appelle *projection d'un point* A *de l'espace, sur l'axe* xx',

faite parallèlement au plan P, *le point d'intersection* a, *avec l'axe, d'un plan parallèle au plan* P *passant par* A (*fig.* 4).

La droite Aa est ce qu'on appelle la *projetante* du point A.

Dans le cas particulier où le plan directeur P est perpendiculaire à l'axe de projection $x'x$, la projection est dite *orthogonale*. Les projetantes sont alors toutes perpendiculaires à l'axe, comme étant situées dans des plans perpendiculaires à cet axe. On peut

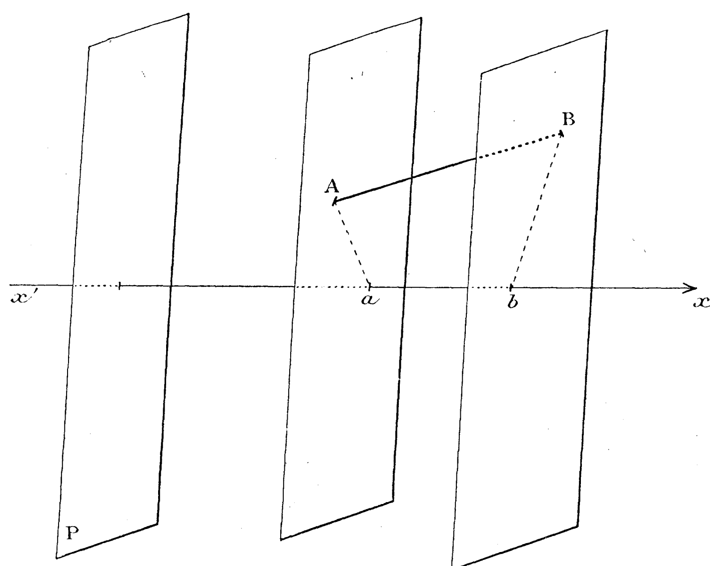


Fig. 4.

donc dire que la projection *orthogonale* d'un point sur un axe est le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe.

On appelle projection d'un vecteur sur un axe le segment, porté par cet axe, qui a pour origine la projection de l'origine et pour extrémité la projection de l'extrémité du vecteur.

Ainsi, soit (AB) un vecteur, a la projection de A, et b la projection de B sur l'axe $x'x$ (*fig.* 4); le segment (ab) est la projection du segment (AB) et nous écrirons :

$$(ab) = \text{proj. (AB)}.$$

Remarque. — Dans le cas où tous les points que l'on projette sont dans un même plan avec l'axe de projection, la définition précédente

peut être mise sous une autre forme. Les projetantes Aa, Bb, Cc... des divers points A, B, C... (*fig.* 5) ne sont alors autre chose que les droites d'intersection des plans projetants avec le plan de la figure ; ces droites sont donc parallèles entre elles, comme intersections de plans parallèles par un même plan. On peut donc dire que, dans ce cas, la projection a d'un point A est l'intersection de l'axe $x'x$ avec

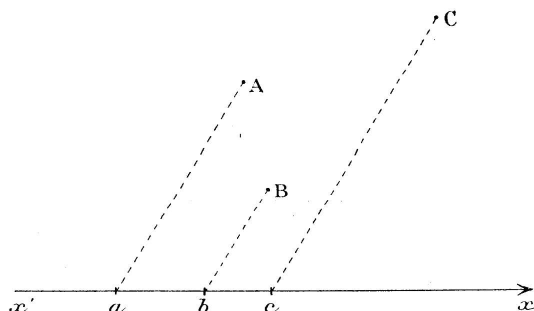


Fig. 5.

la parallèle menée par A à une direction fixe. Dans le cas des projections orthogonales, cette direction fixe est perpendiculaire à l'axe.

7. Théorème. — *Les projections, sur un même axe, de deux segments équipollents sont équipollentes.*

Soient (AB), (A'B') deux vecteurs équipollents et (ab), ($a'b'$) leurs projections sur l'axe xx' (*fig.* 6). Menons par A une parallèle à $x'x$ qui coupe le plan projetant B en β; de même, soit β' le point où la parallèle menée par A' à xx' coupe le plan projetant B'. Les figures Aβba et A'β'$b'a'$ sont évidemment des parallélogrammes. Les segments (Aβ) et (A'β') sont, respectivement, équipollents aux segments (ab) et ($a'b'$). Pour prouver le théorème il suffit donc de prouver que :

$$(A\beta) = (A'\beta').$$

1° Les deux segments sont parallèles et ont même longueur. Car les deux triangles ABβ, A'B'β' ayant leurs côtés parallèles sont semblables. De plus, comme AB = A'B', ils sont égaux. On a donc :

$$A\beta = A'\beta'.$$

2° Les deux segments sont de même sens. Car les deux angles BAβ et B'A'β' ont leurs côtés, respectivement, parallèles et sont

égaux (comme appartenant à des triangles égaux). Puisque (AB) et (A′B′) sont de même sens, (Aβ) et (A′β′) le sont aussi; car, sans cela, les deux angles précédents seraient supplémentaires.

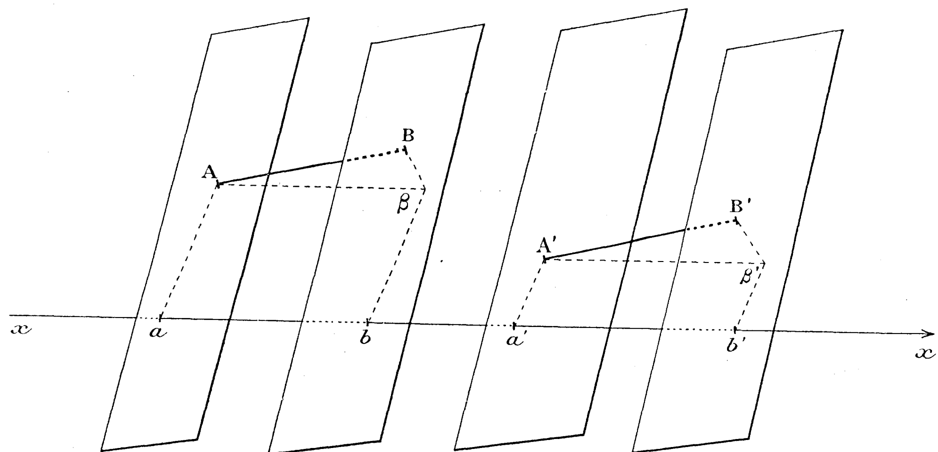


Fig. 6.

8. Théorème. — *La mesure algébrique de la projection, sur un axe, de la résultante de plusieurs segments est égale à la somme des mesures algébriques des projections de ces segments sur cet axe.*

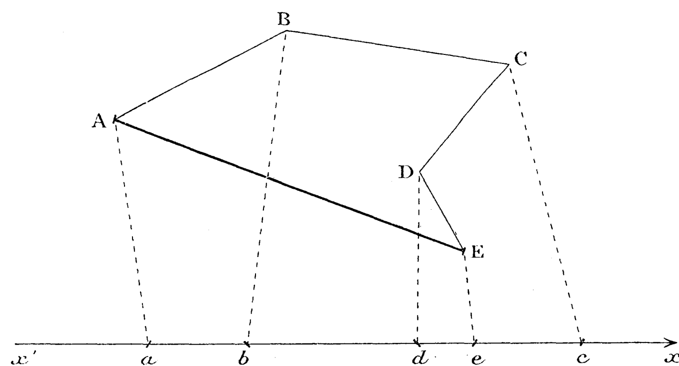


Fig. 7.

Puisque, d'après le théorème précédent, deux segments équipollents ont des projections équipollentes qui, par suite, ont même mesure algébrique, on peut toujours supposer, pour faire cette

démonstration, que les segments sont placés bout à bout, de façon à mettre la résultante en évidence.

Soient donc (AB), (BC), (CD), (DE) plusieurs vecteurs dont la résultante est (AE) (*fig.* 7). a, b, c, d, e étant les projections des points A, B, C, D, E sur un axe $x'x$, on a, par définition :

$$\begin{aligned}(ab) &= \text{proj. (AB)},\\ (bc) &= \text{proj. (BC)},\\ (cd) &= \text{proj. (CD)},\\ (de) &= \text{proj. (DE)},\\ (ae) &= \text{proj. (AE)}.\end{aligned}$$

Or, d'après la proposition du n° 4, on a :

$$\overline{ae} = \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} + \overline{de},$$

et le théorème est démontré.

Corollaire. — *Lorsque plusieurs segments, placés bout à bout, forment un contour polygonal fermé, la somme des mesures algébriques des projections de ces segments, sur un axe, est nulle.*

Car si A coïncide avec E, a coïncide avec e et on a

$$\overline{ae} = 0.$$

Ce corollaire se démontrerait directement comme le théorème qui le précède, en appliquant le théorème de Chasles (n° 5).

Remarque. — On énonce souvent le corollaire précédent sous la forme suivante, abrégée, mais incorrecte.

La somme des projections des côtés d'un contour polygonal fermé, sur un axe, est nulle.

9. **Définition.** — On appelle *segment directeur* ou *vecteur unité* d'un axe, un segment, porté par cet axe, qui a pour mesure algébrique $+1$.

Un axe est parfaitement défini par son segment directeur, car la droite indéfinie qui forme l'axe est la ligne d'action du segment et le sens positif de l'axe est le sens du segment directeur.

Théorème. — *La mesure algébrique de la projection d'un segment porté par un axe, sur un autre axe, est égale au produit de la mesure algébrique de ce segment par la mesure algébrique de la projection du segment directeur de l'axe qui le porte.*

Soit un segment (AB) situé sur un axe $y'y$ et (OD) le segment

directeur de cet axe. Projetons les deux segments (AB) et (OD) sur un axe $x'x$ en (ab) et (od). Je dis que l'on a (*fig.* 8) :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{ab}}{\overline{od}}. \quad (1)$$

1° La relation (1) est vraie, en valeur absolue, car les quatre plans projetant O, D, A et B étant parallèles, interceptent, d'après un

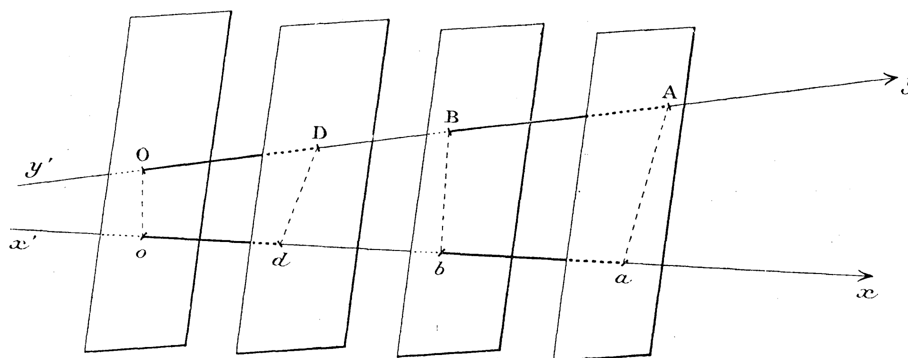


Fig. 8.

théorème connu de géométrie, sur les deux droites $y'y$ et $x'x$, des segments proportionnels ; on a donc :

$$\frac{AB}{OD} = \frac{ab}{od}.$$

2° La relation (1) est vraie en signe. Les quatre points o, a, b, d sont, d'après la manière même dont on les a obtenus, rangés sur $x'x$ dans le même ordre que les quatre points O, A, B, D sur $y'y$. Les deux segments (ab) et (od) sont donc de même sens ou non suivant que les segments (AB) et (OD) sont, eux-mêmes, de même sens ou non. Il en résulte que les deux rapports $\frac{\overline{AB}}{\overline{OD}}$ et $\frac{\overline{ab}}{\overline{od}}$ sont de même signe.

(OD) étant le segment directeur de l'axe $y'y$, on a, par définition,

$$\overline{OD} = +1.$$

La relation (1) s'écrit donc

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{od}} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{+1}.$$

On en tire

$$\overline{ab} = \overline{\mathrm{AB}} \times \overline{od},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. — Dans la suite, nous n'aurons plus à nous occuper que de segments portés par des axes et, plus particulièrement, de leurs mesures algébriques. Pour abréger le langage, nous conviendrons, dorénavant, de supprimer l'expression « mesure algébrique ». Ainsi, au lieu de dire *la mesure algébrique du segment* (AB), nous dirons brièvement *le segment* $\overline{\mathrm{AB}}$. Cela ne donnera lieu à aucune confusion.

LIVRE I

FORMULES FONDAMENTALES

CHAPITRE PREMIER

ARCS ET ANGLES

10. Mesure d'un arc de cercle. — Mesurer un arc de cercle, c'est le comparer à un autre arc du même cercle que l'on prend pour unité. Le nombre qui mesure un arc dépend donc de l'unité d'arc choisie [1].

On emploie, en trigonométrie, deux unités d'arcs différentes, ce qui donne lieu à deux systèmes de mesures.

1° Dans le premier système, on prend pour unité d'arc *le degré*, c'est-à-dire la 360e partie du cercle auquel appartient l'arc qu'il s'agit de mesurer.

Le *degré* est, lui-même, partagé en 60 *minutes;* et la *minute* en 60 *secondes*. Pour désigner, par exemple, un arc de 48 degrés, 31 minutes, 23 secondes, on écrit :

$$48^\circ\ 31'\ 23''.$$

Ce mode de mesure est surtout employé dans les applications pratiques de la trigonométrie.

2° Dans le second système, l'unité choisie est *l'arc dont la longueur est égale au rayon du cercle*. Ceci revient à dire qu'on mesure l'arc comme une longueur ordinaire, en prenant le rayon du cercle pour unité de longueur.

(1) Voir dans les *Leçons de Géométrie* de M. Hadamard, le n° 72.

Ce second mode est surtout employé dans les questions théoriques [1].

REMARQUE. — Dans tout le Livre I, nous n'emploierons, pour mesurer les arcs, que le second mode de mesure. Pour éviter toute confusion, nous désignerons un arc par une lettre majuscule lorsqu'il sera mesuré en degrés, et par une petite lettre lorsqu'il sera mesuré avec le rayon pris pour unité.

11. Problème. — *Connaissant la mesure d'un arc de cercle dans un système, calculer cette mesure dans l'autre système.*

Rappelons, d'abord, la proposition suivante, démontrée en arithmétique [2] : Le rapport des mesures de deux grandeurs est indépendant de l'unité choisie.

Ceci posé, considérons un arc dont la mesure est A, en degrés, et a, en prenant le rayon du cercle comme unité. D'autre part, une demi-circonférence a pour mesure 180, en degrés, et π, en prenant comme unité le rayon ; π désignant, comme de coutume, le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre. Le rapport des mesures de l'arc considéré et d'une demi-circonférence est donc $\frac{A}{180}$, en degrés, et $\frac{a}{\pi}$, dans le second système. Ces rapports étant égaux, d'après la proposition rappelée plus haut, on a :

$$\frac{A}{180} = \frac{a}{\pi}. \tag{1}$$

Cette égalité donne la solution du problème proposé ; car, en résolvant par rapport à A, on a A connaissant a

$$A = 180\, a\, \frac{1}{\pi}. \tag{2}$$

En résolvant par rapport à a, on a a connaissant A

$$a = \frac{\pi A}{180}. \tag{3}$$

(1) Borda avait imaginé un système de mesure des arcs qui était le suivant : l'unité d'arc était la 400e partie de la circonférence et se nommait le *grade*. Dans ces conditions, le *quadrant* (ou quart de circonférence) avait pour mesure 100. On écrivait, alors, la mesure d'un arc en grades et fractions décimales de grades. Ce système avait le grand avantage de faire rentrer la mesure des arcs dans notre système décimal et, par conséquent, de simplifier les calculs d'angles. Malgré sa grande commodité, il n'a pas survécu et on a conservé le *degré* comme unité pratique d'arc.

(2) Voir dans les *Leçons d'Arithmétique* de M. Tannery, le chapitre x, § 1.

REMARQUE I. — Les formules précédentes supposent que A désigne la mesure de l'arc en degrés et fractions décimales de degrés. Lorsqu'on aura calculé A par la formule (2), il faudra transformer les fractions décimales de degrés en minutes et secondes. Pour cela, on multiplie les fractions décimales de degrés par 60 et on a des minutes et fractions décimales de minutes. Puis, on multiplie les fractions décimales de minutes par 60 et on les transforme en secondes et fractions décimales de secondes.

Lorsque, pour calculer a par la formule (3), l'arc aura été donné en degrés, minutes et secondes, on pourra mettre cette formule sous une forme plus commode. Supposons que l'arc soit

$$D^{\circ}\, M'\, S'',$$

on aura, évidemment,

$$A = D + \frac{M}{60} + \frac{S}{3600};$$

et la formule (3) s'écrit

$$(4) \qquad a = \frac{\pi}{180}\left[D + \frac{M}{60} + \frac{S}{3600}\right].$$

REMARQUE II. — Pour l'application pratique des formules de transformation précédentes, il sera bon de connaître les valeurs de π et $\frac{1}{\pi}$. Les voici, avec dix-sept décimales exactes,

$$\pi = 3{,}14159265358979323,$$
$$\frac{1}{\pi} = 0{,}31830988618379067.$$

Dans les calculs pratiques, il suffit, en général, de prendre les valeurs approchées

$$\pi = 3{,}1416 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\pi} = 0{,}3183.$$

EXEMPLE I. — *Calculer la mesure, en degrés, de l'arc de cercle dont la longueur est égale au rayon.*

Ici, on a $a = 1$; la formule (2) donne donc :

$$A = 180 \times \frac{1}{\pi} = 57^{\circ}{,}2958 \text{ (par excès)}.$$

Ou, en transformant les fractions décimales de degrés en minutes et secondes,

$$A = 57^\circ\ 17'\ 44'',8.$$

Exemple II. — *Calculer la longueur de l'arc de 10'', le rayon du cercle étant pris pour unité.*

On a, ici, $A = \frac{10}{3600}$ (*degrés*); la formule (3) donne donc :

$$a = \frac{\pi}{180 \times 360} = 0,0000484813681,$$

avec treize chiffres décimaux exacts.

12. Arcs dirigés. — Définitions. — On dit qu'un cercle est *orienté* dès qu'on a défini, sur la circonférence de ce cercle, un sens de parcours appelé *sens positif;* le sens contraire au sens positif se nomme *sens négatif.* Un *cercle orienté* est donc analogue à un *axe.*

Pour préciser le sens positif, on peut s'y prendre de la façon suivante : soient OA et OB (*fig.* 9) deux rayons rectangulaires du cercle ; le sens positif est parfaitement défini lorsque l'on dit que c'est le sens dans lequel se déplace un mobile qui va de A en B en décrivant un *quadrant* (quart de circonférence). On prend, en général, en trigonométrie, comme sens positif, le sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre; mais ce choix n'a rien d'obligatoire et souvent il est utile de faire autrement. Il arrive même, quelquefois, qu'il est utile de prendre, sur un même cercle, deux sens positifs différents pour deux catégories d'arcs distinctes.

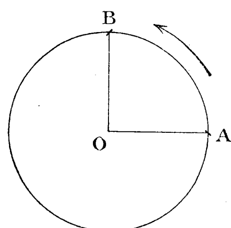


Fig. 9.

13. En géométrie, on appelle arc de cercle l'une des deux portions de ce cercle limitée par deux points de sa circonférence. En trigonométrie, on se sert d'une notion plus générale de l'arc, où intervient, non seulement la longueur de l'arc, mais encore le sens dans lequel il est parcouru. C'est une notion analogue à celle des segments.

Étant donnés deux points A et B, sur un cercle *orienté*, nous appellerons *mesure de l'arc dirigé* AB, ou, simplement, *mesure de l'arc* AB, *la mesure de l'un des chemins décrits, sur la circonférence du cercle, par un mobile qui, partant de* A, *est allé jusqu'en* B ; *ce nombre*

étant précédé du signe (+) ou du signe (—) suivant que le mobile s'est déplacé dans le sens positif ou dans le sens négatif. — Le point A, point de départ du mobile, est l'*origine* de l'arc; le point B, point d'arrivée du mobile, est l'*extrémité* de l'arc.

Pour énoncer un arc AB, on énonce d'abord l'origine et, ensuite, l'extrémité. On écrit $\overset{\frown}{AB}$, en surmontant les deux lettres qui désignent l'arc du signe $\frown$, pour écrire la mesure de l'arc d'origine A et d'extrémité B.

Il faut remarquer, de suite, que, tandis qu'un segment, porté par un axe, n'a qu'*une* mesure algébrique, un arc, porté par un cercle orienté, a une infinité de déterminations. En effet, dans la définition précédente, le mobile qui se déplace de A en B, sur le cercle, peut, d'abord, aller soit dans le sens positif, soit dans le sens négatif. De plus, le chemin décrit peut être plus grand que la circonférence totale du cercle, car le mobile peut, avant de s'arrêter en B, y passer plusieurs fois et ainsi faire une ou plusieurs fois le tour complet du cercle. Ceci se précisera, d'ailleurs, dans la démonstration du théorème qui suit.

La notation $\overset{\frown}{AB}$ désigne, alors, l'*une* des déterminations de l'arc dirigé AB.

14. Théorème. — *Les diverses déterminations d'un même arc ne diffèrent entre elles que par des multiples entiers, positifs, négatifs ou nuls, de la mesure de la circonférence du cercle.*

Soient, en effet (*fig.* 10), deux points A et B de la circonférence d'un cercle orienté. Cherchons à évaluer toutes les déterminations de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

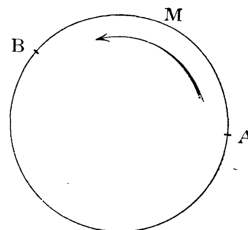


Fig. 10.

Supposons, d'abord, qu'un mobile, en partant de A, se déplace dans le sens positif (sens de la flèche). Lorsqu'il rencontrera, pour la première fois, le point B, il aura décrit un arc géométrique AMB dont la mesure est a; par suite, il aura décrit un arc dirigé dont la mesure est $+a$. C'est une première détermination de $\overset{\frown}{AB}$. Si, quand le mobile est parvenu une première fois en B, on imagine qu'il poursuive sa route dans le sens positif, il reviendra une seconde fois au point B après avoir fait un tour complet sur le cercle. Il aura donc décrit un chemin géométrique total égal à $a + 2\pi$ (en prenant le rayon pour unité); et un arc $\overset{\frown}{AB}$ égal à $+a+2\pi$. De même, si,

après avoir passé une première fois en B, le mobile fait deux fois le tour de la circonférence, il aura décrit une troisième détermination de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ égale à $+a+4\pi$. D'une manière générale, si, après le premier passage en B, le mobile fait p fois le tour de la circonférence, dans le sens positif, il aura décrit une détermination de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ égale à $+a+2p\pi$. Il résulte de là que toutes les déterminations *positives* de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ sont de la forme

$$(1) \qquad a + 2p\pi,$$

p étant un entier, positif ou nul.

Supposons, maintenant, que le mobile, en partant de A, se déplace dans le sens négatif (contraire à la flèche, *fig.* 10). Lorsqu'il atteindra, pour la première fois, le point B, il aura décrit un certain arc géométrique ANB et cet arc a, manifestement, pour mesure $2\pi - a$, puisqu'il est égal à l'excès de la circonférence tout entière sur l'arc AMB. La détermination de l'arc dirigé $\overset{\frown}{AB}$, décrite, est donc $-(2\pi - a)$ ou $a - 2\pi$, puisque le mobile va dans le sens négatif. Après avoir passé une première fois au point B, le mobile pourra encore y revenir un nombre infini de fois, en faisant une ou plusieurs fois le tour de la circonférence dans le sens négatif. Si, par exemple, il a fait q tours, il aura décrit, en tout, une détermination de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ égale à $a - 2\pi - 2q\pi$ ou $a - 2(q+1)\pi$. Toutes les déterminations *négatives* de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ sont donc de la forme

$$(2) \qquad a - 2(q+1)\pi,$$

q étant un nombre entier positif ou nul.

Les deux expressions (1) et (2) peuvent se réunir en une seule et on voit, en résumé, que, a désignant la plus petite détermination positive de l'arc $\overset{\frown}{AB}$, toutes les autres sont de la forme

$$(3) \qquad a + 2k\pi,$$

où k désigne un nombre entier, *positif*, *négatif* ou *nul*.

Le théorème énoncé découle, immédiatement, de là. Soient, en effet, α et α' deux déterminations *quelconques* de l'arc $\overset{\frown}{AB}$; on aura :

$$\alpha = a + 2k\pi,$$
$$\alpha' = a + 2k'\pi,$$

k et k' étant deux certains nombres entiers, positifs, négatifs ou nuls. En retranchant ces deux égalités, membre à membre, il vient

$$\alpha - \alpha' = 2(k - k')\pi.$$

$k - k'$ étant un nombre entier, positif, négatif ou nul ; cette égalité prouve bien que α et α' ne diffèrent que par un multiple entier, positif, négatif ou nul, de 2π.

Remarque I. — Il résulte de ce qui précède que, si α est l'une *quelconque* des déterminations de l'arc $\overset{\frown}{AB}$, toutes les autres sont données par l'égalité

$$\textbf{[1]} \qquad \overset{\frown}{AB} = \alpha + 2h\pi,$$

où h désigne un nombre entier, positif, négatif ou nul [1].

Cette formule suppose que l'on prend le rayon comme unité d'arc. Si l'on prend le degré pour unité, la mesure de la circonférence est 360 et il faut remplacer, dans ce qui précède, 2π par 360. A désignant, alors, l'une quelconque des déterminations de l'arc $\overset{\frown}{AB}$, on a, pour toutes les autres,

$$\textbf{[2]} \qquad \overset{\frown}{AB} = A + h.360.$$

Remarque II. — Les formules [**1**] et [**2**] donnent non seulement la forme de toute détermination de l'arc $\overset{\frown}{AB}$, mais sont encore telles que, réciproquement, elles fournissent *quel que soit* h, une de ces déterminations.

On peut encore énoncer ce résultat sous la forme suivante : *la condition nécessaire et suffisante pour que deux arcs ayant même origine aient aussi même extrémité est qu'ils diffèrent d'un multiple entier, positif, négatif ou nul de la mesure de la circonférence du cercle.*

15. Congruences. — Les diverses déterminations d'un même arc ne diffèrent entre elles, comme nous venons de le voir, que par des multiples entiers de la mesure de la circonférence.

Dans la suite, nous aurons, très souvent, à parler d'arcs de cette nature qui sont égaux à un multiple de la circonférence près. Pour abréger le langage et l'écriture, nous emploierons une notation simplifiée.

(1) Les formules numérotées en caractère *gras* placés entre *crochets* sont des formules importantes que le lecteur devra savoir par cœur.

Nous dirons que deux arcs sont *congrus* s'ils ne diffèrent que par un multiple entier, positif, négatif ou nul, de la mesure de la circonférence [1]. Pour écrire que deux arcs sont congrus nous emploierons le signe $\equiv$, analogue au signe $=$, mais avec une petite barre supplémentaire. Ainsi, a et b étant deux arcs mesurés avec le rayon, pris pour unité, la congruence

$$a \equiv b,$$

signifie que

$$a = b + 2k\pi,$$

k étant un certain nombre entier, positif, négatif ou nul.

Les congruences jouissent de propriétés semblables à celles des égalités. Voici celles qui nous seront utiles.

1° *Deux arcs congrus à un troisième sont congrus entre eux.* Car si l'on a

$$a \equiv b, \qquad b \equiv c,$$

ceci veut dire que

$$a = b + 2k\pi, \qquad b = c + 2k'\pi;$$

on en conclut

$$a = c + 2(k + k')\pi$$

et, par suite,

$$a \equiv c,$$

puisque k et k' sont deux nombres entiers, positifs ou négatifs.

2° *On peut ajouter un même nombre aux deux membres d'une congruence.* Car la congruence

$$a \equiv b$$

(1) D'une manière générale, on dit que deux nombres a et b sont congrus, *relativement au module* c, si la différence $a - b$ est un multiple entier, positif, négatif ou nul, de c; et on écrit :

$$a \equiv b \quad (mod\ c).$$

(Voir dans les *Leçons d'Arithmétique* de M. Tannery, le n° 500). Dans le cas actuel, deux arcs qui ne diffèrent que par un multiple entier, positif ou négatif, de 2π sont congrus, *relativement au module* 2π; mais, comme, dans le cours de cet ouvrage, nous n'aurons jamais à parler que de congruences relatives au module 2π, nous dirons simplement que deux arcs sont congrus, en sous-entendant que cette congruence est relative au module 2π. Ceci ne donnera lieu à aucune ambiguïté.

signifie que

$$a = b + 2k\pi,$$

k étant un entier, positif, ou négatif. Ajoutons aux deux membres de cette dernière égalité un nombre quelconque c, il vient :

$$a + c = b + c + 2k\pi,$$

d'où

$$a + c \equiv b + c.$$

3° *On peut ajouter ou retrancher, membres à membres, plusieurs congruences.* Supposons, en effet, que l'on ait :

$$a \equiv b,$$
$$c \equiv d,$$
$$e \equiv f;$$

ceci veut dire que

$$a = b + 2k\pi,$$
$$c = d + 2k'\pi,$$
$$e = f + 2k''\pi,$$

k, k', k'' étant trois entiers, positifs ou négatifs. En ajoutant, membres à membres, ces trois égalités, il vient :

$$a + c + e = b + d + f + 2(k + k' + k'')\pi.$$

Ce qui prouve que

$$a + c + e \equiv b + d + f.$$

Remarque. — Dire qu'un arc est congru à 0, c'est, par définition, dire que cet arc est un multiple entier, positif ou négatif, de 2π. Il résulte de ce qui précède que la congruence

$$a \equiv b$$

peut s'écrire :

$$a - b \equiv 0.$$

16. Théorème. — *Deux arcs égaux et de signes contraires, qui ont même origine, ont leurs extrémités symétriques par rapport au diamètre qui passe par leur origine commune.* Supposons, en effet, que deux mobiles partent ensemble d'un même point A d'un cercle orienté et

se déplacent sur ce cercle de façon à être constamment symétriques par rapport au diamètre AA′ qui passe en A (*fig.* 11). Les chemins que décriront ces deux mobiles seront évidemment égaux et de signes contraires, puisqu'ils se déplacent en sens contraires, l'un dans le sens de la flèche f, l'autre dans le sens f'.

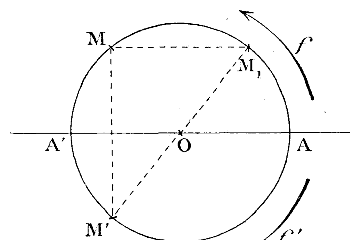


Fig. 11.

Donc, lorsque l'un aura décrit un certain arc a et sera parvenu en M, l'autre aura décrit l'arc $(-a)$ et sera parvenu au point M′, symétrique de M par rapport à AA′ puisque les deux mobiles sont toujours symétriques.

Réciproquement, lorsque deux arcs, qui ont même origine, ont leurs extrémités symétriques, par rapport au diamètre qui passe par leur origine commune, l'un de ces deux arcs est congru à l'autre changé de signe.

Soient les deux arcs $\overset{\frown}{AM}$ et $\overset{\frown}{AM'}$ tels que M et M′ soient symétriques par rapport au diamètre AA′ (*fig.* 11). Si un mobile, en partant de A, décrit l'arc $-\overset{\frown}{AM}$, il parviendra, comme nous venons de le voir, en M′. Les deux arcs $-\overset{\frown}{AM}$ et $\overset{\frown}{AM'}$ ayant même origine et même extrémité, sont donc congrus (n° 14),

$$\overset{\frown}{AM'} \equiv -\overset{\frown}{AM}.$$

17. Définition. — Deux arcs sont dits *supplémentaires* lorsque la somme de leurs mesures est égale à la mesure d'une *demi-circonférence*. Deux arcs sont dits *complémentaires* lorsque la somme de leurs mesures est égale à la mesure d'un *quadrant* (quart de circonférence).

Ainsi, les arcs a et $\pi - a$ sont *supplémentaires;*

les arcs a et $\frac{\pi}{2} - a$ sont *complémentaires.*

Théorème. — *Deux arcs supplémentaires, qui ont même origine, ont leurs extrémités sur une parallèle au diamètre qui passe par leur origine commune.*

Faisons décrire à un mobile, en partant du point A du cercle, un arc a, et soit M le point d'arrivée.

Pour faire décrire à un autre mobile l'arc $\pi - a$, nous commencerons par lui faire décrire l'arc $(-a)$; il arrivera ainsi, en partant du point A, au point M′ symétrique de M par rapport à AA′ (*fig.* 11), d'après le théorème qui précède. Puis, faisons lui décrire l'arc π, c'est-à-dire une demi-circonférence, il parviendra enfin au point M_1 diamétralement opposé au point M′. Or, M_1M' étant un diamètre, l'angle $\widehat{M_1MM'}$ est un angle droit et, comme MM′ est perpendiculaire sur AA′, M_1M lui est parallèle.

Réciproquement, si deux arcs, qui ont même origine, ont leurs extrémités sur une parallèle au diamètre qui passe par leur origine commune, l'un de ces arcs est congru au supplément de l'autre.

Soient les deux arcs $\overset{\frown}{AM}$ et $\overset{\frown}{AM_1}$ tels que (*fig.* 11) la droite MM_1 soit parallèle au diamètre AA′. Nous venons de voir que l'arc $\pi - \overset{\frown}{AM}$, qui a pour origine A, a pour extrémité M_1 ; il est donc congru à l'arc AM_1 (n[os] 14 et 15) :

$$\overset{\frown}{AM_1} \equiv \pi - \overset{\frown}{AM}.$$

18. Théorème. — *Lorsque deux arcs, qui ont même origine, diffèrent d'une demi-circonférence, leurs extrémités sont diamétralement opposées.*

Cette proposition est presque évidente, car si, en partant de A sur le cercle, un mobile décrit un arc a et parvient en M, pour décrire l'arc $a + \pi$ (*fig.* 12), il devra, après avoir atteint le point M, décrire encore l'arc π, c'est-à-dire une demi-circonférence, ce qui l'amènera au point M′ diamétralement opposé à M.

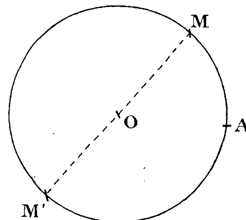


Fig. 12.

Réciproquement, si deux arcs, qui ont même origine, ont leurs extrémités diamétralement opposées, l'un de ces arcs est congru à l'autre augmenté d'une demi-circonférence. Car l'arc $\overset{\frown}{AM} + \pi$ ayant pour origine A est, d'après ce qui précède, terminé en M′.

Donc

$$\overset{\frown}{AM'} \equiv \overset{\frown}{AM} + \pi.$$

On peut encore dire que *ces deux arcs diffèrent d'un multiple impair de demi-circonférences.*

19 Résumé. — Les propositions qui font l'objet des trois numéros précédents sont très utiles et il est bon de leur accorder une mention toute spéciale. Nous les résumons dans les trois égalité suivantes :

$$[3] \qquad \overset{\frown}{AM'} \equiv -\overset{\frown}{AM}, \qquad \text{M et M}' \textit{ symétriques par rapport à } AA';$$

$$[4] \qquad \overset{\frown}{AM'} \equiv \pi - \overset{\frown}{AM}, \qquad \text{M et M}' \textit{ sur une parallèle à } AA';$$

$$[5] \qquad \overset{\frown}{AM'} \equiv \pi + \overset{\frown}{AM}, \qquad \text{M et M}' \textit{ diamétralement opposés.}$$

20. Addition. — Théorème. — *Étant donnés plusieurs points* A, B, C, D, E *sur un cercle orienté, on a, entre les mesures des arcs déterminés par ces points, la relation*

$$[6] \qquad \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DE} + \overset{\frown}{EA} \equiv 0.$$

Cette proposition résulte, presque immédiatement, de la remarque suivante : si un mobile, en partant d'un point A sur un cercle, se déplace toujours dans le même sens et revient au point de départ A, la somme des chemins qu'il aura parcourus sera évidemment égale à un nombre entier de circonférences et, par suite, sera congrue à zéro.

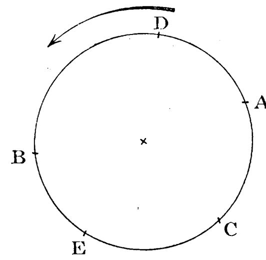


Fig. 13.

Ceci posé, considérons un mobile partant du point A et se déplaçant *dans le sens positif* sur le cercle; il atteindra, à un certain moment le point B (*fig.* 13), et soit a l'arc positif ainsi décrit. a sera la plus petite détermination positive de l'arc AB, et on aura pour tout autre détermination :

$$\overset{\frown}{AB} \equiv a.$$

Le mobile ayant atteint B, obligeons-le à poursuivre sa route *dans le sens positif* et soit b l'arc qu'il aura décrit en arrivant en C. b sera la plus petite détermination positive de l'arc BC et on aura :

$$\overset{\frown}{BC} \equiv b.$$

Et ainsi de suite; faisons toujours tourner le mobile dans le sens positif en passant par D, E et revenant au point A. Il aura ainsi

décrit les plus petites déterminations positives c, d, e des arcs CD, DE, EA, et on aura :

$$\overset{\frown}{CD} \equiv c,$$
$$\overset{\frown}{DE} \equiv d,$$
$$\overset{\frown}{EA} \equiv e.$$

Mais, d'après notre remarque préliminaire, le mobile ayant toujours marché dans le sens positif et étant revenu au point A, la somme

$$a + b + c + d + e$$

des chemins parcourus est congrue à zéro.

D'autre part, en ajoutant les congruences précédentes membres à membres, on a :

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DE} + \overset{\frown}{EA} \equiv a + b + c + d + e$$

et, par suite,

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DE} + \overset{\frown}{EA} \equiv 0.$$

Cas de deux points. — Appliquons le théorème précédent au cas particulier de deux points A et B. On aura :

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BA} \equiv 0$$

ce qui donne :

[**7**] $$\overset{\frown}{BA} \equiv - \overset{\frown}{AB}.$$

Nous exprimons ceci en disant que *les deux arcs* $\overset{\frown}{AB}$ *et* $\overset{\frown}{BA}$ *sont congrus et de signes contraires.*

Cas de trois points. — Dans le cas de trois points A, B, C, la relation [**6**] donne :

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CA} \equiv 0$$

qui peut s'écrire

$$\overset{\frown}{AB} \equiv - \overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{CA},$$

ou encore, puisque $- \overset{\frown}{BC}$ est congru à $\overset{\frown}{CB}$,

[**8**] $$\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CB} - \overset{\frown}{CA}.$$

Corollaire. — *On a, entre les mesures des arcs déterminés par les points* A, B, C, D, E, *la relation*

$$[9] \qquad \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DE}.$$

Ceci est une conséquence immédiate de la formule [**6**], car il suffit d'ajouter aux deux membres $\overset{\frown}{AE}$ et remarquer que

$$\overset{\frown}{AE} + \overset{\frown}{EA} = 0.$$

Remarque. — Le lecteur n'a sans doute pas été sans être frappé de la grande analogie qui existe entre ce théorème et celui de Chasles (n° 4). D'ailleurs, d'une façon générale, tout ce qui a été dit pour les mesures algébriques de segments portés par un axe s'applique, *sans modifications*, aux mesures d'arcs, *à condition de remplacer les égalités par des congruences.*

21. Angles. — Définition. — De même que nous avons substitué à la notion d'arc géométrique la notion plus générale d'arc dirigé, nous élargirons aussi la notion géométrique de l'angle.

Nous dirons qu'un plan est *orienté* dès qu'on a donné dans ce plan un sens positif pour les rotations. Le sens contraire au précédent sera dit « sens négatif ».

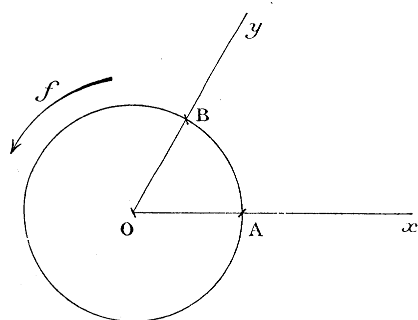


Fig. 14.

Étant, alors, données, dans un plan *orienté*, deux demi-droites *ox* et *oy* (*fig.* 14), issues d'un même point *o*, *nous appellerons mesure de l'angle que fait* ox *avec* oy *la mesure de l'un quelconque des angles dont il faut faire tourner* ox *pour l'amener à coïncider avec* oy*; cette mesure étant précédée du signe* (+) *ou du signe* (—) *suivant que* ox *a tourné dans le sens positif ou dans le sens négatif.* Le côté *ox* est ce qu'on appelle le côté *origine; oy* est le côté *extrémité.* Pour désigner la mesure d'un tel angle on écrit $\widehat{ox, oy}$, en écrivant le côté origine le premier.

On peut remarquer, immédiatement, que, de même qu'un arc, un angle a une infinité de déterminations; car, outre que le rayon *ox*

peut tourner dans deux sens différents, il peut encore faire plusieurs tours autour de o avant de s'arrêter sur oy.

22. L'étude des angles se ramène à celle des arcs de la façon suivante. On sait, en géométrie, qu'un angle au centre a même mesure que l'arc (géométrique) compris entre ses côtés pourvu qu'on prenne, comme unité d'angle, l'angle au centre qui comprend entre ses côtés l'unité d'arc[1]. Considérons, alors, l'angle de ox avec oy (*fig.* 14) et décrivons, du sommet o de l'angle comme centre, un cercle que nous orienterons dans le même sens f que le plan. Ce cercle coupera les côtés ox et oy, respectivement, en A et B et il est manifeste que l'angle $\widehat{ox, oy}$ aura même mesure que l'arc dirigé $\overset{\frown}{AB}$. En effet, tandis que ox tourne autour de o, le point A se déplace sur le cercle et lorsque ox coïncide avec oy, A coïncide avec le point B; le chemin décrit par A mesure donc l'angle décrit par ox. D'ailleurs, comme les sens positifs sont les mêmes sur le cercle et dans le plan, les deux mesures, celle de l'arc et celle de l'angle, auront les mêmes signes.

Il résulte de là que *tout ce que nous avons établi pour les mesures des arcs s'applique, sans modifications, aux angles.* Nous nous contenterons d'énoncer les divers résultats.

Théorème. — *Les diverses déterminations d'un angle ne diffèrent entre elles que par des multiples entiers, positifs, négatifs ou nuls, de* 2π *ou de* 360, *suivant l'unité de mesure choisie.*

Ainsi, si α est l'une des déterminations de l'angle de ox avec oy, mesuré avec l'angle qui correspond à l'arc égal au rayon, pris pour unité, toutes les autres sont données par la formule

$$[10] \qquad \widehat{ox, oy} = \alpha + 2k\pi.$$

Si, au contraire, l'unité d'angle est le degré, on a :

$$[11] \qquad \widehat{ox, oy} = A + k\,360,$$

A étant la mesure de l'angle α en degrés. k désigne, dans ces deux formules, un nombre entier, positif ou négatif.

En employant le langage et l'écriture abrégés, on dira que deux

(1) Voir dans les *Leçons de Géométrie* de M. Hadamard, faisant partie de la collection, le n° 70.

déterminations de l'angle $\widehat{ox, oy}$ sont *congrues;* et on écrira les égalités précédentes sous les formes :

$$\widehat{ox, oy} \equiv \alpha,$$

et

$$\widehat{ox, oy} \equiv \text{A}.$$

23. Théorème. — *ox, oy, oz, ot, étant plusieurs demi-droites issues d'un même point o, dans un plan orienté, on a, entre les angles qu'elles forment, la relation*

$$[12] \qquad \widehat{ox, oy} + \widehat{oy, oz} + \widehat{oz, ot} + \widehat{ot, ox} \equiv 0.$$

Dans le cas particulier de *deux* droites on a :

$$\widehat{ox, oy} + \widehat{oy, ox} \equiv 0,$$

ce qui donne :

$$[13] \qquad \widehat{oy, ox} \equiv -\widehat{ox, oy}.$$

Les deux angles $\widehat{oy, ox}$ et $\widehat{ox, oy}$ sont congrus et de signes contraires.

Pour trois droites on a :

$$\widehat{ox, oy} + \widehat{oy, oz} + \widehat{oz, ox} \equiv 0,$$

d'où on conclut

$$[14] \qquad \widehat{ox, oy} \equiv \widehat{oz, oy} - \widehat{oz, ox};$$

relation qui permet de calculer l'angle de deux directions, connaissant les angles qu'elles font avec une troisième direction origine oz.

Corollaire. — *Étant données plusieurs demi-droites ox, oy, oz, ot, on a :*

$$[15] \qquad \widehat{ox, ot} \equiv \widehat{ox, oy} + \widehat{oy, oz} + \widehat{oz, ot}.$$

EXERCICES

1. Évaluer en degrés, minutes et secondes les arcs dont les longueurs sont :

$$3, \quad \frac{22}{7}, \quad \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}, \quad \sqrt{2-\sqrt{2}}, \quad \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{2}}{20},$$

le rayon du cercle étant pris pour unité.

2. Quelles sont les longueurs des arcs de

$$10^\circ, \quad 23^\circ 17', \quad 2^\circ 52' 43''.$$

3. Comment sont placées, sur le cercle, les extrémités des arcs dont les longueurs sont :

$$\alpha, \quad \alpha + \frac{\pi}{3}, \quad \alpha + \frac{2\pi}{3},$$

tous ces arcs ayant même origine?

4. Calculer les compléments et suppléments des angles

$$15^\circ 23', \quad 193^\circ 6', \quad 243^\circ 13' 6''.$$

5. Étant donné, sur un cercle orienté, un point fixe O, un point M du cercle sera parfaitement défini si on se donne la mesure de l'arc dirigé $\overset{\frown}{OM}$. Appelons ce nombre l'*abscisse curviligne* du point M.

Démontrer que l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est congru à l'excès de l'abscisse de l'extrémité B sur l'abscisse de l'origine A.

CHAPITRE II

DÉFINITIONS DES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES

24. Définition. — Nous appellerons *cercle trigonométrique* un cercle orienté dont le rayon est égal à l'unité de longueur.

Dans toute la suite de ce premier livre, nous considérerons toujours les arcs comme mesurés avec un arc-unité égal au rayon. De telle façon que le quadrant aura pour mesure $\frac{\pi}{2}$; la demi-circonférence π; et la circonférence tout entière 2π.

Il sera très facile au lecteur de transposer, plus tard, les formules en degrés lorsque le besoin s'en fera sentir.

25. Cosinus. — Définition. — Étant donnés, sur un cercle trigonométrique O, un ou plusieurs arcs d'origine A, nous appellerons *axe des cosinus relatif aux arcs d'origine* A l'axe $x'x$ (*fig.* 15) dont le segment directeur est $\overline{OA}$ (c'est-à-dire dont la droite

indéfinie est OA et dont le sens positif est de O vers A. — *Voir* n° 9).

On appelle cosinus *d'un arc* $\overset{\frown}{AM}$ *le segment* $\overline{OP}$ (1) *projection orthogonale du vecteur* (OM), *qui joint le centre* O *du cercle à l'extrémité* M *de l'arc, sur l'axe des cosinus relatif à cet arc* (*fig.* 15).

On désigne le cosinus d'un arc a par la notation : cos a; ce qu'on lit : *cosinus a*.

Il faut remarquer, de suite, que la définition précédente montre que le cosinus d'un arc ne dépend aucunement de la position de son

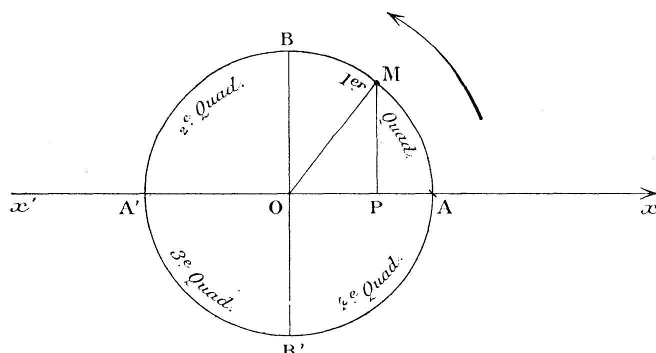


FIG. 15.

origine A sur le cercle ; car, modifier la position de l'origine sans changer la grandeur de l'arc, revient à faire tourner la figure 15 autour du point O dans son plan, ce qui ne modifie nullement $\overline{OP}$. De plus, le cosinus ne dépend que de la position relative de l'extrémité M par rapport à l'origine A ; donc *deux arcs congrus ont le même cosinus*. Ceci se traduit par l'égalité

$$[16] \qquad \cos(a + 2k\pi) = \cos a,$$

où k est un nombre entier arbitraire, positif ou négatif.

26. Variation du cosinus. — Soit $\overset{\frown}{AM}$ (*fig.* 15) un arc d'un cercle trigonométrique et proposons-nous d'étudier la variation du cosinus de cet arc lorsque son extrémité M décrit le cercle tout entier, dans le sens positif, en partant du point A.

Soit B l'extrémité d'un arc égal à $+\frac{\pi}{2}$ d'origine A. Les deux

(1) Je rappelle, encore une fois, que l'expression « le segment $\overline{OP}$ » est une manière abrégée de dire « la mesure algébrique $\overline{OP}$ du segment (OP) ».

diamètres AA′ et BB′ partagent le cercle en quatre quadrants que l'on numérote dans l'ordre dans lequel on les rencontre en partant du point A et en tournant dans le sens positif sur le cercle (1).

Lorsque le point M décrit le premier quadrant, de A vers B, sa projection P sur l'axe des cosinus $x'x$ va de A en O. Le cosinus est *positif* et *décroît* de $\overline{OA} = +1$ à zéro.

Quand le point M décrit ensuite le second quadrant BA′, le point P va de O en A′. Le cosinus est *négatif* et *continue à décroître* de zéro à $\overline{OA'} = -1$.

Le point M décrivant le troisième quadrant A′B′, le point P revient de A′ en O. Le cosinus est encore *négatif* et *croît* de -1 à zéro.

Enfin, lorsque M décrit le quatrième quadrant B′A, P va de O en A. Le cosinus est *positif* et *croît* de zéro à $+1$.

Ceci peut s'exprimer d'une autre manière. Soit x l'arc $\overset{\frown}{AM}$; pour que, le point A restant fixe, l'extrémité M décrive le cercle tout entier dans le sens positif, il suffit de faire varier x de 0 à 2π. Lorsque l'arc x atteint les valeurs $\frac{\pi}{2}$, π et $\frac{3\pi}{2}$ le point M est, respectivement, en B, A′ et B′.

La variation précédente peut, alors, se résumer dans le tableau suivant qu'on lit de haut en bas et dans lequel les valeurs de x sont rangées par ordre de grandeur croissante.

	x	$\cos x$	
	0	$+1$	
1er *Quad.*		décroît	*positif.*
	$\frac{\pi}{2}$	0	
2e *Quad.*		décroît	*négatif.*
	π	-1	
3e *Quad.*		croît	*négatif.*
	$\frac{3\pi}{2}$	0	
4e *Quad.*		croît	*positif.*
	2π	$+1$	

Remarque. — De ce qui précède, il est facile de déduire la variation du cosinus lorsque l'arc x prend toutes les valeurs

(1) Comme nous l'avons fait remarquer plus haut (n° 12), la connaissance du point B suffit pour définir le sens positif sur le cercle; car ce sens est celui dans lequel se déplace un mobile qui va de A en B en décrivant un quadrant.

possibles de $-\infty$ à $+\infty$. En effet, lorsque x croît de 2π à 4π, l'extrémité M de l'arc fait le tour du cercle exactement de la même façon que lorsque x variait de 0 à 2π. Il en est de même lorsque x varie de 4π à 6π, de 6π à 8π, etc.; et, aussi, de -2π à 0, de -4π à -2π, etc. Il en résulte que dans les intervalles

$$\ldots, (-4\pi, -2\pi), (-2\pi, 0), (0, 2\pi), (2\pi, 4\pi), (4\pi, 6\pi), \ldots$$

la variation est la même. Le cosinus repasse donc, *périodiquement*, pour des valeurs de x distantes de 2π en 2π, par les mêmes valeurs.

27. Sinus. — Définition. — Étant donnés, sur un cercle trigonométrique, un ou plusieurs arcs d'origine A, on appelle *axe des sinus relatif aux arcs d'origine* A l'axe $y'y$ (*fig.* 16) obtenu en faisant tourner l'axe des cosinus de ces arcs d'un angle droit dans le sens positif. On a donc :

$$\widehat{ox, oy} = +\frac{\pi}{2}.$$

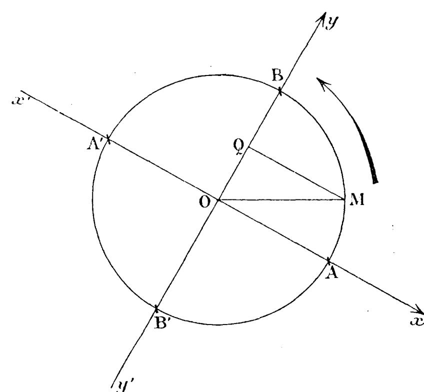


Fig. 16.

On peut remarquer de suite que si B est l'extrémité du premier quadrant d'origine A, le segment directeur de l'axe $y'y$ est $\overline{OB}$.

On appelle, alors, sinus *d'un arc* $\overset{\frown}{AM}$ *le segment* $\overline{OQ}$ *projection orthogonale du vecteur* (OM), *qui joint le centre* O *du cercle à l'extrémité* M *de l'arc, sur l'axe des sinus relatif à cet arc* (*fig.* 16).

On désigne le sinus d'un arc a par la notation $\sin a$; ce qui s'énonce : *sinus a*.

Comme pour le cosinus, *deux arcs congrus ont le même sinus*, on a donc :

$$[17] \qquad \sin(a + 2k\pi) = \sin a,$$

k désignant un entier positif ou négatif.

28. Variation du sinus. — Imaginons encore que, l'origine A d'un arc $\overset{\frown}{AM}$ restant fixe, son extrémité M décrive le cercle dans le sens positif. Marquons encore les quatre quadrants successifs en conservant les mêmes notations qu'au n° 26.

Lorsque M décrit le premier quadrant AB, sa projection Q, sur l'axe des sinus, se déplace de O en B. Le sinus est *positif* et *croît* de zéro à $\overline{OB} = +1$.

M décrivant le second quadrant BA′, Q revient de B en O. Le sinus est encore *positif* et *décroît* de $+1$ à zéro.

Quand M décrit le troisième quadrant A′B′, le point Q va de O en B′. Le sinus est *négatif* et *décroît* de zéro à $\overline{OB'} = -1$.

Enfin, lorsque M décrit le dernier quadrant B′A, Q revient de B′ en O. Le sinus est encore *négatif* et *croît* de -1 à zéro.

En remarquant, comme nous l'avons déjà fait, que, lorsque l'arc x croît de 0 à 2π, son origine A restant fixe, l'extrémité M décrit tout le cercle dans le sens positif, cette variation se résume dans le tableau suivant :

	x	$\sin x$	
	0	0	
1er *Quad.*		croît	*positif.*
	$\frac{\pi}{2}$	$+1$	
2e *Quad.*		décroît	*positif.*
	π	0	
3e *Quad.*		croît	*négatif.*
	$\frac{3\pi}{2}$	-1	
4e *Quad.*		décroît	*négatif.*
	2π	0	

29. Remarques. — Les variations précédentes du cosinus et du sinus donnent lieu aux remarques suivantes :

1° *Le cosinus et le sinus d'un arc sont toujours compris entre* -1 *et* $+1$.

2° *Le cosinus s'annule lorsque l'arc est un multiple impair, positif ou négatif, de* $\frac{\pi}{2}$. Car le cosinus s'annule lorsque l'extrémité M (*fig.* 15) est en B ou B′, c'est-à-dire lorsque l'arc est congru à $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$. L'arc est, alors, de la forme $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ou $2k\pi + \frac{3\pi}{2}$; par suite, c'est un multiple impair *quelconque* de $\frac{\pi}{2}$.

3° *Le sinus s'annule lorsque l'arc est un multiple entier de* π. Car le sinus s'annule lorsque M (*fig.* 16) est en A ou en A′, c'est-à-dire lorsque l'arc est congru à 0 ou à π.

30. Tangente. — Définition. — Étant donné un point A sur un cercle trigonométrique (*fig.* 17), on mène au point A la tangente $t't$ au cercle et, sur cette tangente, on choisit un sens positif parallèle à celui de l'axe $y'y$ des sinus des arcs d'origine A. L'axe ainsi défini est ce qu'on appelle *l'axe des tangentes relatif aux arcs d'origine* A.

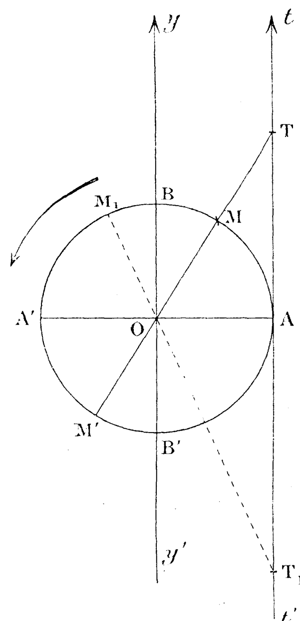


Fig. 17.

On appelle alors tangente *d'un arc* $\overset{\frown}{AM}$ *le segment* $\overline{AT}$ (*fig.* 17), *porté par l'axe des tangentes, ayant pour origine l'origine* A *de l'arc et pour extrémité le point d'intersection* T *du diamètre du point* M *avec l'axe.*

On désigne la tangente d'un arc a par la notation : tang a ou tg a; ce qui s'énonce : *tangente* a.

Deux arcs congrus ont même tangente ; mais ici il y a plus. *Deux arcs qui diffèrent d'un multiple quelconque de* π *ont même tangente.* Soit, en effet, a l'arc $\overset{\frown}{AM}$. Tous les arcs terminés en M ou en M′, diamétralement opposé à M, ont la même tangente que l'arc a. Or, les arcs terminés en M diffèrent de a d'un multiple *pair* de π et tous les arcs terminés en M′ diffèrent de a (n° 18) d'un multiple *impair* de π.

Donc, en réunissant ces deux cas, tous les arcs terminés soit en M soit en M′ sont de la forme $k\pi + a$.

On a donc :

$$[\mathbf{18}] \qquad \operatorname{tg}(k\pi + a) = \operatorname{tg} a.$$

31. Variation de la tangente. — L'origine A de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ (*fig.* 17) restant fixe, faisons décrire à l'extrémité M tout le cercle dans le sens positif.

Lorsque le point M décrit le premier quadrant AB, le point T, où le diamètre de M coupe l'axe des tangentes $t't$, se déplace dans le sens positif sur cet axe et décrit le demi-axe At tout entier.

A mesure que M se rapproche de B, le diamètre MM′ tend à prendre la position BB′ parallèle à $t't$ et le point T s'éloigne indéfiniment dans le sens positif. Donc, lorsque M décrit le premier quadrant la tangente part de zéro et *croît* sans cesse et au delà de toute limite.

Lorsque le point M (*fig.* 17) dépasse le point B et arrive dans une position telle que M_1, le point T se trouve en une position telle que T_1 sur le demi-axe négatif At'. La tangente est négative ; par conséquent, lorsque M a traversé le point B, la tangente a passé brusquement de $+\infty$ à $-\infty$ [1].

Quand M décrit le second quadrant, T remonte tout l'axe négatif At' pour revenir au point A. La tangente est *négative* et *croît* de $-\infty$ à zéro.

Lorsque le point M décrit le troisième et le quatrième quadrant, c'est-à-dire la demi-circonférence A′B′A, la tangente reprend les valeurs précédentes et dans le même ordre. En effet, lorsque M′ décrit le demi-cercle A′B′A, le point diamétralement opposé M décrit le demi-cercle ABA′ et les arcs terminés en M′ et M (*fig.* 17) ont même tangente $\overline{AT}$.

On peut résumer cette variation, comme les précédentes, dans le tableau suivant :

	x	$\operatorname{tg} x$	
1er *Quad.*	0	0	*positive.*
		croît	
	$\frac{\pi}{2}$	$+\infty$	
		$-\infty$	
2e *Quad.*		croît	*négative.*
	π	0	
3e *Quad.*		croît	*positive.*
	$\frac{3\pi}{2}$	$+\infty$	
		$-\infty$	
4e *Quad.*		croît	*négative.*
	2π	0	

Remarque. — Lorsqu'on connaît la variation de la tangente, lorsque x croît de 0 à π, on connaît, du même coup, sa variation lorsque x croît de $-\infty$ à $+\infty$. Car, comme nous venons de le

(1) Pour plus amples informations sur cette locution, voir dans mes *Leçons d'Algèbre*, n° 64, page 163 ; n° 115, page 330 ; et les n°s 122 à 125, qui contiennent de nombreux exemples de variations.

voir, de π à 2π elle varie comme de 0 à π. Puis, de 2π à 3π, de 3π à 4π, etc..., ainsi que de $-\pi$ à 0, de -2π à π, etc, la variation est aussi la même que lorsque x croît de 0 à π puisque, dans chacun de ces intervalles, l'extrémité M de l'arc décrit une des deux demi-circonférences ABA′ ou A′B′A.

Lorsque x croît, la tangente reprend les mêmes valeurs de π en π tandis que le cosinus et le sinus ne les reprenaient que de 2π en 2π.

32. Cotangente. — Définition. — Soit A un point d'un cercle trigonométrique et B le point tel que

$$\overset{\frown}{AB} = +\frac{\pi}{2}.$$

Menons, au point B, la tangente $z'z$ au cercle et prenons, sur cette tangente, un sens positif parallèle au sens positif de l'axe des

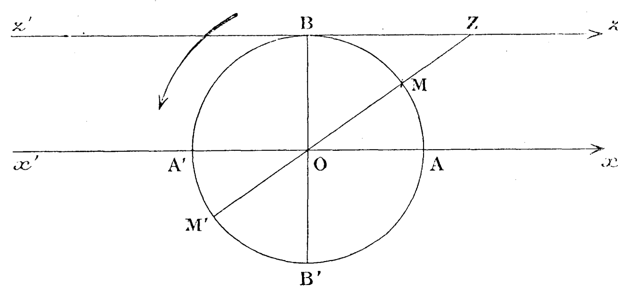


Fig. 18.

cosinus des arcs d'origine A. L'axe $z'z$ ainsi défini (*fig.* 18) est ce qu'on appelle l'*axe des cotangentes relatif aux arcs d'origine A*.

Ceci posé, *on appelle* cotangente *d'un arc* $\overset{\frown}{AM}$ *le segment* $\overline{BZ}$, *porté par l'axe $z'z$ des cotangentes, ayant pour origine le point de contact* B *de cet axe avec le cercle et pour extrémité le point d'intersection* Z *du diamètre qui passe en* M *avec cet axe.*

On désigne la cotangente d'un arc a par la notation : cotang a ou cotg a; ce qui s'énonce : *cotangente a.*

De même que pour la tangente, *deux arcs qui diffèrent d'un multiple quelconque de π ont même cotangente.* Car, si deux tels arcs ont même origine A, leurs extrémités sont ou coïncidantes ou diamétralement opposées. On a donc :

[19] $$\text{cotg}\,(k\pi + a) = \text{cotg}\,a,$$

k étant un entier, positif ou négatif.

33. Variation de la cotangente. — La variation de la cotangente est analogue à celle de la tangente.

Lorsque l'extrémité M de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ (*fig.* 18) est en A, le diamètre M′M occupe la position A′A parallèle à $z'z$ et le point Z est infiniment éloigné. M décrivant le premier quadrant AB, le point Z se rapproche de B pour y parvenir. La cotangente est *positive* et *décroît* de $+\infty$ à zéro.

Quand M décrit le second quadrant BA′, le point Z passe sur la partie négative Bz' de l'axe et s'éloigne indéfiniment dans le sens de B vers z'. La cotangente est *négative* et *décroît* encore de zéro à $-\infty$.

Quand M décrit le demi-cercle A′B′A, la cotangente reprend les valeurs précédentes, dans le même ordre.

On a, alors, le tableau de variation suivant :

	x	$\cot g\, x$	
1er *Quad.*	0	$+\infty$	
		décroît	*positive.*
	$\frac{\pi}{2}$	0	
2e *Quad.*		décroît	*négative.*
	π	$-\infty$ / $+\infty$	
3e *Quad.*		décroît	*positive.*
	$\frac{3\pi}{2}$	0	
4e *Quad.*		décroît	*négative.*
	2π	$-\infty$	

De même que la tangente, la cotangente reprend de π en π le mêmes valeurs quand x croît de $-\infty$ à $+\infty$.

34. Remarques. — Les variations de la tangente et de la cotangente donnent lieu aux remarques suivantes :

1° *La tangente et la cotangente d'un même arc sont toujours de même signe.*

2° Elles varient, l'une et l'autre, toujours dans le même sens. *La tangente est toujours croissante; la cotangente toujours décroissante.*

3° Lorsque l'une est nulle, l'autre est infiniment grande.

La tangente est nulle et la cotangente infinie lorsque l'arc est un

multiple quelconque de π. Car ceci a lieu lorsque M est en A ou A′ et ce sont là les arcs pour lesquels le sinus s'annule (nº 29, 3º).

La cotangente est nulle et la tangente infinie lorsque l'arc est un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$. Car ceci a lieu lorsque M est en B ou B′, c'est-à-dire lorsque le cosinus est nul (nº 29, 2º).

Les particularités précédentes trouveront, plus loin, une explication dans ce fait que la cotangente d'un arc est égale à l'inverse de la tangente du même arc.

35. Sécante. — Définition. — *On appelle* sécante *d'un arc* $\overset{\frown}{AM}$ (*fig.* 19) *le segment* $\overline{OS}$, *porté par l'axe des cosinus relatif à cet arc, ayant pour origine le centre* O *du cercle et pour extrémité le point d'intersection* S *de la tangente au cercle en* M *avec l'axe.*

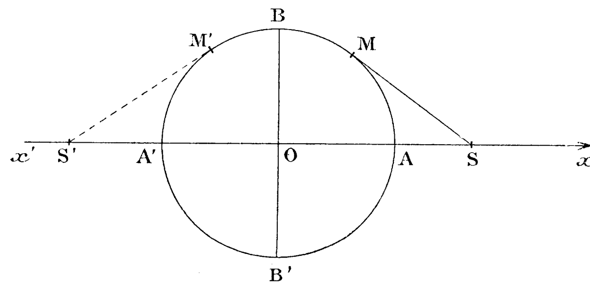


Fig. 19.

On désigne la sécante de l'arc a par la notation : séc a; ce qui se lit : *sécante a.*

On voit immédiatement que *deux arcs congrus ont même sécante;* on a donc :

$$[20] \qquad \text{séc}\,(2k\pi + a) = \text{séc}\,a,$$

k étant un entier, positif ou négatif.

36. Variation de la sécante. — Lorsque l'extrémité M de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ décrit le premier quadrant AB, le point S part de A et s'éloigne indéfiniment sur ox. La sécante $\overline{OS}$ est donc *positive* et *croît* de $\overline{OA} = +1$ jusqu'à $+\infty$; car lorsque M est en B la tangente MS devient parallèle à ox.

Quand M pénètre dans le second quadrant (en M′ *fig.* 19) le point S passe sur la partie négative ox' de l'axe (en S′).

S décrit la portion $x'A'$ de l'axe de x' vers A'. La sécante est *négative* et *croît* encore de $-\infty$ à $\overline{OA'} = -1$.

M décrivant le troisième quadrant et le quatrième, S repasse, en sens inverse, par les positions précédentes. Donc, dans le troisième quadrant la sécante est *négative* et *décroît* de -1 à $-\infty$; dans le quatrième quadrant elle est *positive* et *décroît* de $+\infty$ à $+1$.

Résumons ceci dans un tableau :

	x	séc x	
1er *Quad.*	0	$+1$	*positive.*
		croît	
	$\frac{\pi}{2}$	$+\infty$	
2e *Quad.*		$-\infty$	*négative.*
		croît	
	π	-1	
3e *Quad.*		décroît	*négative.*
	$\frac{3\pi}{2}$	$-\infty$	
4e *Quad.*		$+\infty$	*positive.*
		décroît	
	2π	$+1$	

37. Remarques. — 1° *La sécante a toujours le même signe que le cosinus.*

2° *La sécante ne prend aucune valeur comprise entre* -1 *et* $+1$.

3° *La sécante est infiniment grande lorsque l'arc est un multiple impair de* $\frac{\pi}{2}$. Car la sécante est infiniment grande lorsque le cosinus est nul.

Nous montrerons, plus loin, que la sécante est l'inverse du cosinus. Ces remarques seront alors évidentes.

38. Cosécante. — **Définition.** — *On appelle* cosécante *d'un arc* $\overset{\frown}{AM}$ (*fig.* 20) *le segment* $\overline{OV}$, *porté par l'axe* $y'y$ *des sinus relatif à cet arc, ayant pour origine le centre* O *du cercle et pour extrémité le point* V *où la tangente au cercle* M *coupe cet axe.*

On désigne la cosécante d'un arc a par la notation : coséc a; ce qui s'énonce *cosécante a*.

Il résulte, de cette définition, que *deux arcs congrus ont même cosécante*. On a donc :

$$[\mathbf{21}] \qquad \text{coséc}\,(2k\pi + a) = \text{coséc}\,a,$$

k étant un entier, positif ou négatif.

39. Variation de la cosécante. — Lorsque l'arc est nul, c'est-à-dire lorsque son extrémité M coïncide avec l'origine A, la tangente MV est parallèle à l'axe $y'y$ et la cosécante est infiniment grande. Le point M décrivant le premier quadrant, V décrit la portion yB de l'axe, dans le sens négatif. La cosécante est *positive* et *décroît* de $+\infty$ à $\overline{OB} = +1$.

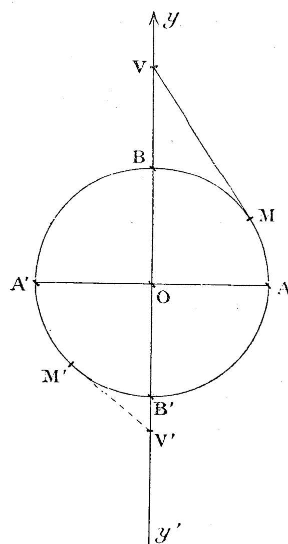


FIG. 20.

Quand M décrit le second quadrant, V repasse, en sens inverse, par les positions précédentes. La cosécante est encore *positive* et *croît* de $+1$ à $+\infty$.

Lorsque le point M passe dans le troisième quadrant (en M' *fig.* 20), le point V passe sur la portion négative oy' de l'axe (en V'). La cosécante devient négative.

M décrivant le troisième quadrant, V' va de y' (à l'infini) en B'. La cosécante est *négative* et *croît* de $-\infty$ à $\overline{OB'} = -1$.

Enfin, lorsque M décrit le dernier quadrant, V' reprend, en sens inverse, les positions précédentes. La cosécante est *négative* et *décroît* de -1 à $-\infty$.

Ceci se résume dans le tableau suivant :

	x	coséc x	
	0	$+\infty$	
1er *Quad.*		décroît	*positive.*
	$\frac{\pi}{2}$	$+1$	
2e *Quad.*		croît	*positive.*
	π	$+\infty$ / $-\infty$	
3e *Quad.*		croît	*négative.*
	$\frac{3\pi}{2}$	-1	
4e *Quad.*		décroît	*négative.*
	2π	$-\infty$	

40. Remarques. — 1° *La cosécante a toujours le même signe que le sinus.*

2° De même que la sécante, *la cosécante ne prend aucune valeur comprise entre* — 1 et + 1.

3° *La cosécante est infiniment grande lorsque l'arc est un multiple entier quelconque de* π. Car la cosécante est infiniment grande lorsque le sinus est nul.

Ces remarques deviendront évidentes lorsque nous aurons montré que la cosécante est l'inverse du sinus.

41. Tableau des signes des lignes trigonométriques. — Il est tout à fait nécessaire de bien connaître, suivant la position relative de l'extrémité d'un arc par rapport à son origine, les signes des diverses lignes trigonométriques. Nous résumons ces signes dans le tableau que voici :

	Cosinus.	Sinus.	Tangente.	Cotangente.	Sécante.	Cosécante.
1er *Quadrant.*	+	+	+	+	+	+
2e *Quadrant.*	—	+	—	—	—	+
3e *Quadrant.*	—	—	+	+	—	—
4e *Quadrant.*	+	—	—	—	+	—

Outre les remarques que nous avons déjà faites sur la correspondance des signes du cosinus et de la sécante, du sinus et de la cosécante, de la tangente et de la cotangente, ce tableau nous montre encore que *le signe de la tangente et de la cotangente se déduit des signes du cosinus et du sinus par la règle des signes d'algèbre.* La tangente et la cotangente sont positives ou négatives suivant que le cosinus et le sinus sont de même signe ou non.

42. Lignes trigonométriques d'un angle. — Définition. — Nous appellerons sinus, cosinus, tangente, cotangente, sécante et cosécante d'un angle les lignes trigonométriques de mêmes noms de l'arc qui le mesure.

Ainsi, soit $\widehat{ox,om}$ un angle. Traçons, de o comme centre, avec

l'unité pour rayon, un cercle orienté qui coupe *ox* en A (*fig.* 21) et *om* en M. L'arc $\overset{\frown}{AM}$ a, comme nous l'avons vu (nº 22), même mesure que l'angle $\widehat{ox, om}$ et nous appellerons, par exemple, sinus de l'angle $\widehat{ox, om}$ le sinus de l'arc $\overset{\frown}{AM}$.

43. Cosinus de l'angle de deux axes. — Étant donnés deux axes *x'x* et *m'm* (*fig.* 21) qui se coupent en *o*, nous appellerons *angle de ces deux axes* l'angle formé par les deux directions positives *ox* et

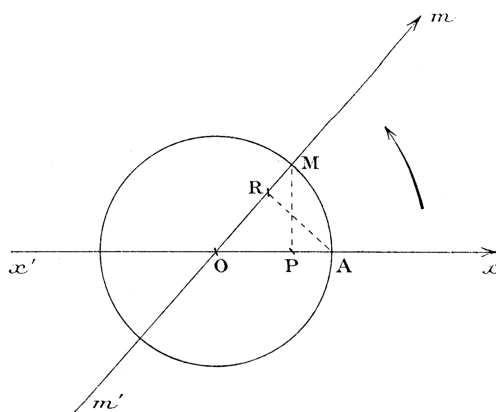


Fig. 21.

om. Soient, alors, OA et $\overline{OM}$ les segments directeurs de ces deux axes. L'angle $\widehat{ox, om}$ est, précisément, mesuré par l'arc $\overset{\frown}{AM}$. Or, *x'x* est l'axe des cosinus de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ et, comme le cosinus est, par définition, la projection orthogonale $\overline{OP}$ du vecteur (OM) sur *x'x*, on peut donner la définition suivante du cosinus de l'angle $\widehat{ox, om}$: *le cosinus de l'angle* $\widehat{ox, om}$ *est la mesure algébrique* $\overline{OP}$ *de la projection orthogonale du segment directeur de l'axe* om *sur l'axe* ox.

Projetons le point A en R sur *om*. Le segment $\overline{OR}$, porté par l'axe *om*, est, d'après ce que nous venons de dire, le cosinus de l'angle $\widehat{om, ox}$. Or, d'après la symétrie de la figure, on a, évidemment,

$$\overline{OA} = \overline{OR}.$$

Il en résulte, qu'*étant donnés deux axes*, *le cosinus de leur angle est*

le même, quel que soit celui des deux axes que l'on prend comme origine de l'angle,

$$[22] \qquad \cos(\widehat{ox, om}) = \cos(\widehat{om, ox}).$$

Ceci nous permettra, dorénavant de parler du *cosinus de l'angle de deux axes, sans préciser quel est celui des deux axes qui sert d'origine à l'angle.*

44. Théorème fondamental. — *La projection orthogonale d'un segment, porté par un axe, sur un autre axe, est égale au produit de ce segment par le cosinus de l'angle des deux axes.*

Soit, en effet, un segment $\overline{AB}$ porté par l'axe $y'y$ (*fig.* 22). Projetons, orthogonalement, ce segment en $\overline{ab}$ sur un axe $x'x$ qui coupe

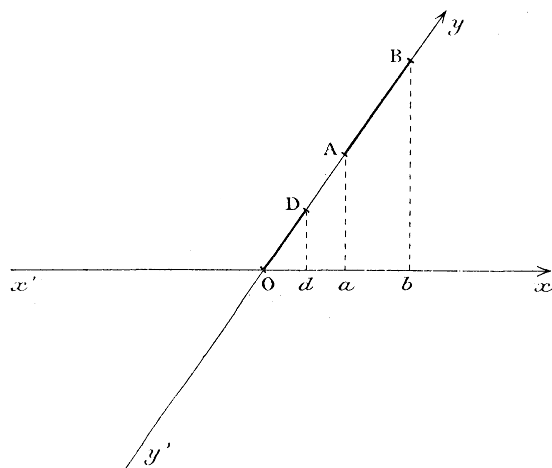


Fig. 22.

le premier en O. Soit $\overline{OD}$ le segment directeur de l'axe $y'y$ et $\overline{Od}$ sa projection sur $x'x$.

D'après le théorème du n° 9, on a :

$$\overline{ab} = \overline{AB}.\ \overline{Od}.$$

Or, comme nous venons de le voir, on a :

$$\overline{Od} = \cos(\widehat{x'x, y'y});$$

il en résulte que

$$\overline{ab} = \overline{AB} \cdot \cos(\widehat{x'x, y'y})$$

ou

$$\text{proj.}\ (\overline{AB}) = \overline{AB} \cdot \cos(\widehat{x'x, y'y}).$$

Ce théorème très important nous sera d'une grande utilité dans la suite.

EXERCICES

6. Démontrer qu'on peut définir la tangente d'un arc de la façon suivante :

Soit $\overset{\frown}{AM}$ cet arc. Au point M on mène une tangente $m'm$ au cercle trigonométrique et, sur cette droite, on prend un sens positif contraire à celui que l'on a choisi sur le cercle. Soit T le point où le rayon OA prolongé coupe $m'm$. La tangente de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ est le *segment* $\overline{MT}$ porté par l'axe $m'm$.

De même, si on prend le point S où le rayon OB perpendiculaire à OA coupe $m'm$, la *cotangente* de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ est égale au *segment* $\overline{MS}$.

7. Construire, géométriquement, un arc plus petit qu'un quadrant, sachant que la corde qui le sous-tend est égale à son cosinus. (Le cercle a pour rayon 1.)

8. x variant de 0 à 2π, étudier les variations de

$$\sin^2 x - 3\sin x + 2,$$
$$\frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1},$$
$$2\cos^2 x - 3\cos x + 1.$$

CHAPITRE III

INVERSION DES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES

45. Énoncé du problème. — Le problème de l'*inversion* d'une ligne trigonométrique est le suivant : *connaissant une ligne trigonométrique d'un arc, trouver cet arc.*

La solution de cette question comprend deux parties : 1° on cherche *un* arc admettant la ligne donnée. Nous nous contenterons d'abord de donner ici une construction géométrique de cet arc; nous apprendrons, plus loin, dans le *Second Livre*, comment on pourra *calculer* un tel arc ; 2° connaissant ce premier arc, on cherche toutes les autres solutions.

46. Inversion du cosinus et de la sécante. — Soit a un nombre donné; proposons-nous de trouver un arc dont le cosinus est égal à a. Choisissons arbitrairement l'origine A de cet arc sur le cercle trigonométrique et soit ox l'axe des cosinus des arcs d'origine A. Portons sur ox, à partir de O, un segment $\overline{OP}$ égal à a. D'après la définition même du cosinus, tout arc, dont le cosinus est $\overline{OP}$ et qui a pour origine A, est tel que son extrémité se projette orthogonalement en P sur ox. Si donc on élève en P une perpendiculaire à ox (*fig.* 23) qui coupe le cercle en M et M′, les arcs cherchés sont tous ceux qui sont terminés en M et M′, symétriques par rapport à ox.

On voit, de suite, que, pour que la construction réussisse, il faut que P tombe entre A et A′, c'est-à-dire que $\overline{OP} = a$ soit compris

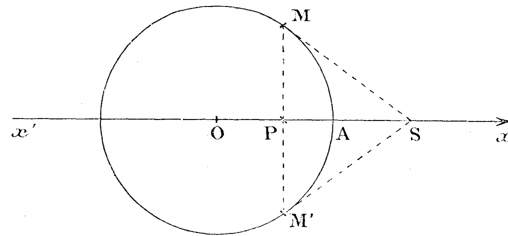


Fig. 23.

entre -1 et $+1$. On aurait pu prévoir cela; car on sait qu'un cosinus est toujours compris entre -1 et $+1$ (n° 29, 1°).

On désigne un arc dont le cosinus est égal à a par la notation : arc cos a; ce qui s'énonce *arc cosinus a*

De même, étant donné un nombre b, proposons-nous de trouver les arcs dont la sécante est égale à b. Portons, à cet effet, sur l'axe des cosinus ox un segment $\overline{OS}$ (*fig.* 23) égal à b. D'après la définition de la sécante, tout arc dont la sécante est $\overline{OS}$, et qui a pour origine A, est tel que la tangente au cercle en son extrémité passe par S. Si donc on mène de S les tangentes SM et SM′, tous les arcs cherchés ont leurs extrémités situées soit en M soit en M′. Ces deux points M et M′, sont, comme pour le cas du cosinus, symétriques par rapport au diamètre AA′.

Pour que cette construction soit possible, il faut que le point S soit extérieur au cercle c'est-à-dire qu'il ne tombe pas entre A et A′. Il faut, pour cela, que le nombre b donné ne soit pas compris entre -1 et $+1$. Ceci était à prévoir puisqu'une sécante n'est jamais comprise entre -1 et $+1$ (n° 37, 2°).

On désigne un arc dont la sécante est égale à b par la notation : arc séc b ; ce qui se lit *arc sécante b*.

En résumé, tous les arcs qui ont une origine donnée A et qui ont un cosinus donné ou une sécante donnée, ont leurs extrémités situées en l'un de deux certains points M et M′ *symétriques par rapport au diamètre qui passe en* A.

Ceci posé, soit α l'un des arcs $\overset{\frown}{AM}$. Tous les arcs terminés en M sont congrus à α. Tous les arcs terminés en M′ (N° 16, *Récip.*) sont congrus à $-\alpha$. Il en résulte que tous les arcs terminés soit en M soit en M′ sont de la forme

$$2\,k\pi \pm \alpha,$$

k étant entier, positif, négatif ou nul.

(Dans toute la suite de ce chapitre, la lettre k aura toujours la même signification.)

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Tous les arcs qui ont même cosinus ou même sécante que l'arc α sont compris dans la formule*

[**23**] $$2k\pi \pm \alpha.$$

On peut donc écrire que l'on a :

$$\text{arc cos}\,(\cos\alpha) = 2k\pi \pm \alpha\,;$$
$$\text{arc séc}\,(\text{séc}\,\alpha) = 2k\pi \pm \alpha.$$

(La notation arc cos(cos α) désigne, comme nous venons de le dire, un *arc dont le cosinus est égal à* cos α.)

47. Inversion du sinus et de la cosécante. — Soit A un point du cercle trigonométrique choisi comme origine des arcs, et $y'y$ l'axe des sinus correspondant qui coupe le cercle en B et B′. Donnons-nous un nombre a, positif ou négatif, et cherchons tous les arcs dont le sinus est égal à a. Portons, à cet effet, sur $y'y$ un segment $\overline{OQ}$ (*fig.* 24) égal à a. Tout arc ayant son origine en A et admettant $\overline{OQ}$ pour sinus est, par définition, tel que son extrémité se projette en Q sur $y'y$. Si donc on élève en Q une perpendiculaire à $y'y$ qui coupe le cercle en M et M′, tous les arcs cherchés sont ceux qui sont terminés en M ou M′, la droite MM′ étant parallèle au diamètre qui passe en A.

La construction n'est possible que si Q tombe entre B et B′. Ceci exige que le nombre donné a soit compris entre -1 et $+1$; ce qui

n'a rien de surprenant puisqu'un sinus est toujours compris dans ces limites (nº 29, 1º).

On désigne un arc dont le sinus est égal à a par la notation : arc sin a ; ce qui s'énonce *arc sinus a*.

Supposons, de même, qu'on se propose de trouver tous les arcs dont la cosécante a une valeur donnée b. Nous porterons sur l'axe $y'y$ un segment $\overline{OV}$ égal à b et du point V (*fig.* 24) nous mènerons les tangentes VM et VM′ au cercle. Tous les arcs admettant $\overline{OV}$ pour cosécante sont terminés soit en M, soit en M′ ; et la droite MM′ est encore ici parallèle au diamètre qui passe en A.

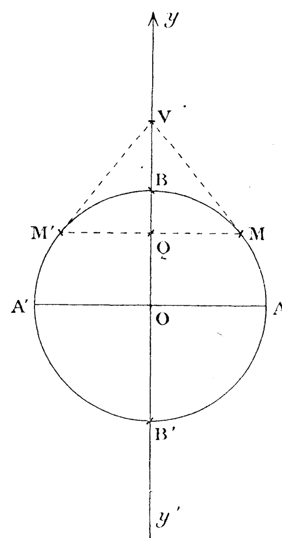


Fig. 24.

Cette construction n'est possible que si V n'est pas entre B et B′. Il faut donc que le nombre donné b ne soit pas compris entre -1 et $+1$; ce qui est naturel, puisqu'une cosécante n'est jamais comprise entre -1 et $+1$ (nº 40, 2º).

On désigne un arc dont la cosécante est égale à b par la notation : arc coséc b ; ce qui se lit : *arc cosécante b*.

En somme, tous les arcs qui ont une origine donnée A et qui ont soit un sinus donné, soit une cosécante donnée, ont leurs extrémités situées en l'un de deux certains points M et M′ *situés sur une parallèle au diamètre qui passe en* A.

Cela étant, soit α l'un des arcs $\overset{\frown}{AM}$. Tous les arcs terminés en M sont congrus à α. Tous les arcs terminés en M′ sont, comme nous l'avons vu (nº 17, *Récip.*), congrus à $\pi - \alpha$. On en conclut que tous les arcs terminés en M ou en M′ ont une des deux formes :

$$2k\pi + \alpha$$

ou

$$2k\pi + \pi - \alpha = (2k + 1)\pi - \alpha.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Tous les arcs qui ont même sinus ou même cosécante que l'arc α sont compris dans les formules :*

$$[24] \qquad \begin{cases} 2k\pi + \alpha, \\ (2k+1)\pi - \alpha. \end{cases}$$

Ces deux formules peuvent être réunies en une seule. Remarquons, en effet, que si p est un nombre entier, positif, négatif ou nul $(-1)^p$ est égal à $+1$ lorsque p est pair ou nul, et égal à -1 lorsque p est impair [1]. La formule suivante comprend donc les deux précédentes :

$$[24]^{bis} \qquad p\pi + (-1)^p \alpha.$$

On peut donc écrire que l'on a :

$$\text{arc sin}\,(\sin \alpha) = p\pi + (-1)^p \alpha;$$
$$\text{arc coséc}\,(\text{coséc}\,\alpha) = p\pi + (-1)^p \alpha.$$

48. Inversion de la tangente et de la cotangente. — Soit A un point pris sur le cercle trigonométrique (*fig.* 25), $t't$ et $z'z$

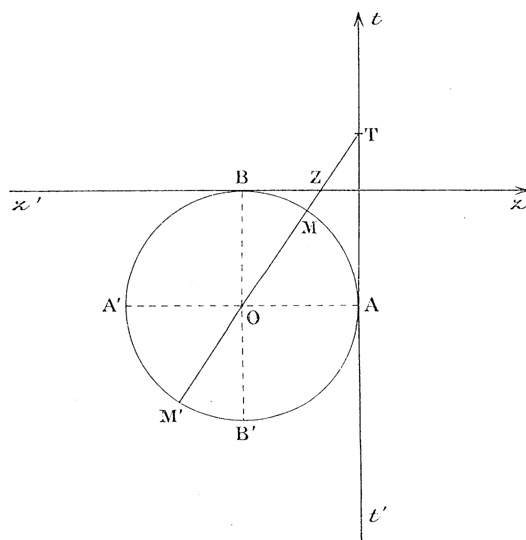


Fig. 25.

les axes des tangentes et cotangentes relatifs aux arcs d'origine A. Donnons-nous d'abord un nombre a et cherchons les arcs dont la tangente est égale à a. Pour cela, portons sur l'axe des tangentes $t't$ un segment $\overline{AT}$ égal à a. Joignons T au centre O du cercle. Cette droite coupe le cercle en deux points M et M', diamétralement opposés. Tous les arcs qui admettent $\overline{AT}$ pour tangente, et qui ont

(1) Voir dans mes *Leçons d'Algèbre*, le n° 19, page 44.

leur origine en A, sont terminés soit en M, soit en M′. Cette construction est toujours possible, quel que soit a.

On désigne un arc dont la tangente est égale à a par la notation : arc tg a ou arc tang a ; ce qu'on lit *arc tangente a*.

Soit, de même, un nombre b. Prenons sur l'axe des cotangentes $z'z$, à partir de son point de contact B avec le cercle, un segment $\overline{BZ}$ égal à b. Joignons Z au centre O du cercle. Cette droite coupe le cercle en deux points diamétralement opposés, M et M′. Tous les arcs qui admettent $\overline{BZ}$ pour cotangente, et qui ont leur origine en A, sont terminés en M ou en M′. Cette construction est toujours possible.

On désigne un arc dont la cotangente est égale à b par la notation : arc cotg b ou arc cotang b ; ce qui s'énonce *arc cotangente b*.

En résumé, tous les arcs qui ont une origine donnée A et qui ont soit une tangente donnée, soit une cotangente donnée, ont leurs extrémités situées en l'un de deux certains points M et M′ *diamétralement opposés*.

Soit alors α, l'un des arcs $\overset{\frown}{AM}$, c'est-à-dire l'un des arcs ayant pour tangente a ou pour cotangente b. Tous les arcs terminés en M sont congrus à α et tous les arcs terminés en M′ sont congrus à $\pi + \alpha$ (n° 18, *Récip.*). Il en résulte que tous les arcs terminés soit en M soit en M′ diffèrent de α, d'un multiple pair ou impair de π, c'est-à-dire d'un multiple *quelconque* de π et sont compris dans la formule

$$k\pi + \alpha.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante .

Théorème. — *Tous les arcs qui ont même tangente ou même cotangente que l'arc α sont compris dans la formule :*

$$[25] \qquad k\pi + \alpha.$$

On peut donc écrire :

$$\text{arc tg}\,(\text{tg}\,\alpha) = k\pi + \alpha;$$
$$\text{arc cotg}\,(\text{cotg}\,\alpha) = k\pi + \alpha.$$

(Rappelons que arc tg (tg α) signifie : arc dont la tangente est égale à tg α.)

49. Remarque. — Il est clair qu'au lieu de rechercher les *arcs*

admettant une ligne trigonométrique donnée, on aurait pu chercher les *angles*. Les résultats auraient été identiques aux précédents. Il suffit, dans les raisonnements, de supposer que les arcs dont on parle, servent de mesures à des angles.

EXERCICES

9. *Construire* les arcs dont le sinus est égal à $\frac{1}{3}$; ou dont le cosinus est égal à $-\frac{1}{4}$.

10. Résoudre les égalités

$$\sin(ax+b) = \sin(cx+d),$$
$$\operatorname{tg}\frac{x+a}{x-a} = \operatorname{tg}\frac{x+b}{x-b}.$$

CHAPITRE IV

RELATIONS ENTRE LES LIGNES D'ARCS SUPPLÉMENTAIRES, COMPLÉMENTAIRES, ETC.

50. Nous venons de voir, dans le chapitre précédent, que, lorsque deux arcs ont même cosinus, ils ont aussi même sécante; s'ils ont même sinus, ils ont même cosécante; enfin, s'ils ont même tangente, ils ont aussi même cotangente.

Dans ce qui va suivre, nous aurons à écrire des égalités de lignes trigonométriques de certains arcs. Il résulte de cette remarque qu'il suffira de s'occuper des cosinus, des sinus et des tangentes. Car *l'égalité des cosinus de deux arcs entraîne celle des sécantes; l'égalité des sinus entraîne celle des cosécantes; l'égalité des tangentes entraîne celle des cotangentes.*

51. Théorème. — *Deux arcs égaux et de signes contraires ont même cosinus. Leurs sinus et tangentes sont, respectivement, de signes contraires.*

Car d'après le théorème du n° 16, si on donne à ces deux arcs

même origine A, leurs extrémités M et M′ sont symétriques par rapport au diamètre AA′. Ces deux points M et M′ ont donc (*fig.* 26) même projection P sur l'axe $x'x$ des cosinus et des projections Q et Q′ symétriques par rapport à O sur l'axe $y'y$ des sinus. Enfin, OA étant la bissectrice de l'angle MOM′, les rayons OM et OM′ coupent l'axe des tangentes tt' en des points T′ et T symétriques par rapport à A. On a donc :

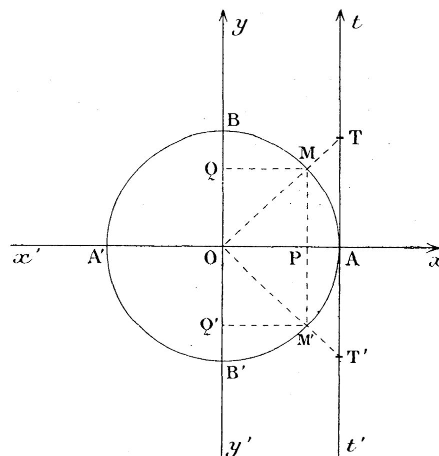


Fig. 26.

$$[26] \quad \begin{cases} \cos(-x) = \cos x, \\ \sin(-x) = -\sin x, \\ \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x. \end{cases}$$

Il résulte de là que les deux arcs ont même sécante et des cosécantes et cotangentes de signes contraires.

52. Théorème. — *Deux arcs supplémentaires ont même sinus. Leurs cosinus et leurs tangentes sont de signes contraires.*

D'après le théorème du n° 17, si on donne à ces deux arcs même origine A, leurs extrémités M et M′ (*fig.* 27) sont situées sur une parallèle au diamètre AA′. Les deux points M et M′ ont donc même projection Q sur l'axe des sinus $y'y$ et des projections P et P′ symétriques par rapport à O sur l'axe $x'x$ des cosinus. Les intersections T et T′ des rayons OM et OM′ avec l'axe $t't$ des tangentes sont évidemment symétriques par rapport à A puisque $y'y$ et $x'x$ sont les bissectrices de l'angle M′OM.

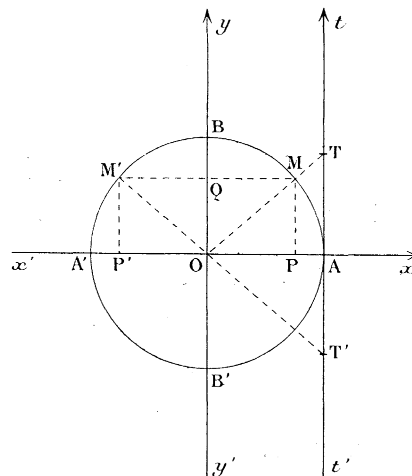


Fig. 27.

Il en résulte que :

$$[27] \quad \begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos x, \\ \sin(\pi - x) = \sin x, \\ \operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x. \end{cases}$$

53. Théorème. — *Deux arcs qui diffèrent d'une demi-circonférence ont même tangente. Leurs cosinus et leurs sinus sont, respectivement, de signes contraires.*

Car d'après le nº 18, ces deux arcs, s'ils ont même origine A, ont leurs extrémités M et M′ diamétralement opposées. Ils ont donc

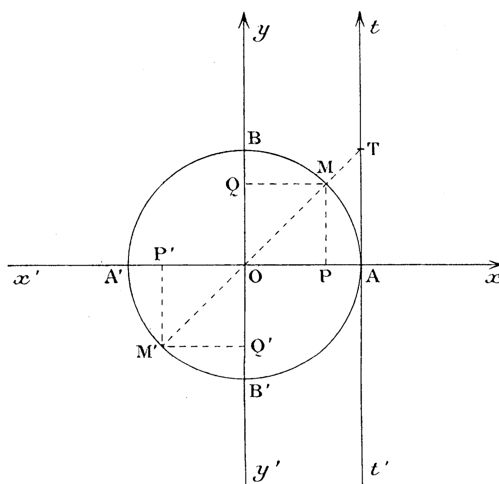


Fig. 28.

évidemment même tangente $\overline{AT}$. Les projections P et P′, Q et Q′ de M et M′ sur l'axe des cosinus et l'axe des sinus sont symétriques par rapport à O (*fig.* 28). On en conclut que :

$$[28] \quad \begin{cases} \cos(\pi + x) = -\cos x, \\ \sin(\pi + x) = -\sin x, \\ \operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x. \end{cases}$$

Remarque. — La relation

$$\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x$$

n'est qu'un cas particulier de la relation plus générale [**18**] (nº 30).

On aurait pu établir les relations [**28**] en combinant les deux théorèmes précédents des numéros 52 et 53. Car, si on remarque que

$$\pi + x = \pi - (-x),$$

on a, en appliquant, successivement, les formules [**27**] et [**26**],

$$\begin{aligned} \cos(\pi + x) &= -\cos(-x) = -\cos x, \\ \sin(\pi + x) &= \sin(-x) = -\sin x, \\ \operatorname{tg}(\pi + x) &= -\operatorname{tg}(-x) = \operatorname{tg} x. \end{aligned}$$

54. Théorème. — *Lorsque deux arcs sont complémentaires, le cosinus, la cosécante et la cotangente de l'un sont, respectivement, égaux au sinus, à la sécante et à la tangente de l'autre.*

Pour établir cette proposition, nous ferons, d'abord, la remarque que voici :

Soit $\overset{\frown}{AM}$ un arc sur un cercle orienté dans le sens positif f (*fig.* 29) et B l'extrémité d'un arc $\overset{\frown}{AB}$ égal à $+\frac{\pi}{2}$. Si on prend, sur le cercle, un nouveau sens positif f', contraire au précédent, l'arc $\overset{\frown}{BM}$ (sens positif f') est congru au complément de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ (sens positif f).

Désignons, en effet, par x l'arc $\overset{\frown}{AM}$ (mesuré dans le sens positif f) On a d'après la formule [**8**] de Chasles (nº 20),

$$\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{AM} - \overset{\frown}{AB};$$

et, par suite :

$$\overset{\frown}{BM} = x - \frac{\pi}{2} \quad \text{(sens positif } f\text{)}.$$

Si l'on prend pour sens positif f', le signe de chaque arc change et, par suite, on a :

$$\overset{\frown}{BM} = \frac{\pi}{2} - x \quad \text{(sens positif } f'\text{)}.$$

— C'est à cause de cette propriété du point B qu'on l'appelle souvent *l'origine des arcs complémentaires des arcs d'origine* A. —

Ceci posé, soit x un arc et portons cet arc en $\overset{\frown}{AM}$ sur le cercle, avec le sens positif f. Soit B l'origine des arcs complémentaires. Soient $x'x$, $y'y$, $t't$ et $z'z$ les axes des cosinus, des sinus, des tangentes et des cotangentes des arcs d'origine A (sens positif f).

Si, en second lieu, on prend B pour origine des arcs et le sens

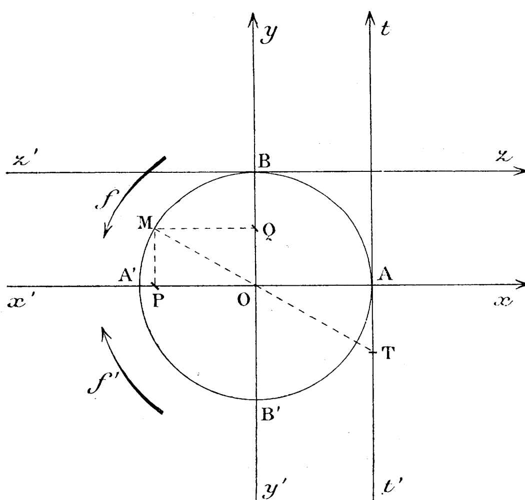


Fig. 29.

positif f', $y'y$ ayant pour segment directeur $\overline{OB}$ sera l'axe des cosinus. On aura

$$\overset{\frown}{BA} = +\frac{\pi}{2} \text{ (sens positif } f'\text{)}$$

et $x'x$, ayant pour segment directeur $\overline{OA}$, sera le nouvel axe des sinus. $z'z$ sera alors le nouvel axe des tangentes et $t't$ celui des cotangentes.

Projetons le vecteur (OM) sur $x'x$. Cette projection sera, en même temps, le cosinus de l'arc $\overset{\frown}{AM} = x$ (sens positif f) et le sinus de l'arc $\overset{\frown}{BM} = \frac{\pi}{2} - x$ (sens positif f'). On a donc :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$$

En projetant de même sur $y'y$, on aurait, à la fois en $\overline{OQ}$, le sinus de l'arc $\overset{\frown}{AM} = x$ (sens f) et le cosinus de $\overset{\frown}{BM} = \frac{\pi}{2} - x$ (sens f'). Ce qui donne :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$$

Si on prend le point d'intersection T (*fig.* 29) du rayon OM avec $t't$, on aura, à la fois, en $\overline{AT}$, la tangente de l'arc $\overset{\frown}{AM} = x$ et la cotangente de l'arc $\overset{\frown}{BM} = \frac{\pi}{2} - x$. On en conclut que :

$$\text{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{tg}\, x\,;$$

et ainsi de suite.

On aura, en résumé, le tableau de relations suivantes :

$$[29] \quad \left\{ \begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x, \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x, \\ \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \text{cotg}\, x, \\ \text{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \text{tg}\, x, \\ \text{séc}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \text{coséc}\, x, \\ \text{coséc}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \text{séc}\, x. \end{aligned} \right.$$

Remarque. — Le cosinus, la cotangente et la cosécante tirent précisément leurs noms de la propriété qu'exprime le théorème précédent. Ainsi *co-sinus* est une abréviation de *sinus* du complément. Ces noms sont d'ailleurs utiles pour retenir ces relations.

55. Remarque I. — Les relations précédentes combinées entre elles peuvent servir à en établir d'autres. Ainsi, si l'on remarque

que $\frac{\pi}{2} + x$ est le complément de $-x$, les formules [**29**] et [**26**] donnent :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin(-x) = -\sin x,$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(-x) = \cos x,$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x.$$

56. Remarque II. — Il est bon de s'exercer à écrire aussi les relations précédentes en prenant le degré pour unité d'arc. Ainsi on aura, à la place des formules [**27**], celles-ci :

$$[\mathbf{27}]^{bis} \quad \left\{ \begin{aligned} \cos(180 - A) &= -\cos A, \\ \sin(180 - A) &= \sin A, \\ \operatorname{tg}(180 - A) &= -\operatorname{tg} A. \end{aligned} \right.$$

De même, les formules [**29**] s'écrivent :

$$[\mathbf{29}]^{bis} \quad \left\{ \begin{aligned} \cos(90 - A) &= \sin A, \\ \sin(90 - A) &= \cos A, \\ \operatorname{tg}(90 - A) &= \operatorname{cotg} A. \end{aligned} \right.$$

57. Problème. — *Réduire un arc au premier quadrant.*

Réduire un arc au premier quadrant, c'est trouver un autre arc positif et plus petit qu'un quadrant, admettant, au signe près, les mêmes lignes trigonométriques que l'arc donné. Ce problème, qui est toujours possible, se présentera, plus tard, dans toutes les questions où il s'agira de faire des calculs pratiques au moyen des *tables* qui ne contiennent que les lignes des arcs et des angles de 0° à 90°.

Soit a, un arc mesuré avec le rayon pris pour unité, on peut, d'abord, en ajoutant ou retranchant un nombre suffisant de fois 2π de a, trouver un arc α, compris entre 0 et 2π, congru à a. L'arc α a les mêmes lignes trigonométriques que a. Ceci posé, il peut se présenter quatre cas :

1° *α est plus petit que* $\frac{\pi}{2}$. Le problème est alors résolu.

2° *α est compris entre* $\frac{\pi}{2}$ *et* π. Alors, l'arc supplémentaire $\pi - \alpha$ répond à la question, en vertu des formules [**27**].

3° *α est compris entre π et $\frac{3\pi}{2}$.* C'est, alors, l'arc $\alpha - \pi$ qui répond à la question; car cet arc est congru à $\pi + \alpha$ et il suffit de se reporter aux formules [**28**].

4° *α est compris entre $\frac{3\pi}{2}$ et 2π.* On prend l'arc $2\pi - \alpha$ qui, étant congru à $(-\alpha)$, résout la question en vertu des formules [**26**].

Exemple I. — *Réduire au premier quadrant l'arc* $\frac{17\pi}{3}$. On a :

$$\frac{17\pi}{3} = 4\pi + \frac{5\pi}{3} \equiv \frac{5\pi}{3}.$$

$\frac{5\pi}{3}$ étant compris entre $\frac{3\pi}{2}$ et 2π, on considère l'arc $2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ qui répond à la question. On a, alors,

$$\cos\frac{17\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3},$$
$$\sin\frac{17\pi}{3} = -\sin\frac{\pi}{3},$$
$$\mathrm{tg}\,\frac{17\pi}{3} = -\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3},$$

en appliquant les formules [**26**].

Exemple II. — *Réduire au premier quadrant l'angle de* $-500°$. On a :

$$-500° = -720° + 220° \equiv 220°.$$

L'angle 220° étant compris entre 180° et 270° (ce qui correspond à π et $\frac{3\pi}{2}$), on prend l'angle de $220° - 180° = 40°$ et on a :

$$\cos(-500°) = -\cos 40°,$$
$$\sin(-500°) = -\sin 40°,$$
$$\mathrm{tg}\,(-500°) = \mathrm{tg}\,40°,$$

en vertu des formules [**28**].

EXERCICES

11. Calculer les lignes trigonométriques des arcs :

$$x + 5\pi, \quad x + \frac{3\pi}{2}, \quad x - \frac{\pi}{2}, \quad x + \frac{7\pi}{2},$$

en fonction des lignes de l'arc x.

12. Étant donné un arc α, trouver :
1° Tous les arcs dont les cosinus sont égaux à $-\cos\alpha$;
2° Tous les arcs dont les sinus sont égaux à $\cos\alpha$;
3° Tous les arcs dont la cotangente est égale à $-\mathrm{tg}\,\alpha$.

13. Réduire au premier quadrant les angles

$$213°\,20', \quad -(105°\,23'\,12'')$$

et les arcs dont les longueurs sont (avec le rayon pris pour unité) :

$$-3, \quad \frac{22\pi}{3}, \quad \frac{355}{113}.$$

14. Résoudre les égalités :

$$\sin^2 x = \cos^2 x,$$
$$\sin(x + a) = \cos(x + b),$$
$$\operatorname{tg}(x^2 - 1) = \operatorname{cotg} x.$$

CHAPITRE V

RELATIONS ALGÉBRIQUES ENTRE LES LIGNES D'UN MÊME ARC

58. Relations fondamentales. — Théorème. — *La somme des carrés du sinus et du cosinus d'un même arc est égale à l'unité.*

Soit $\overset{\frown}{AM}$ un arc quelconque, P et Q les projections de M sur l'axe des cosinus $x'x$ et des sinus $y'y$ (*fig.* 30). La figure OPMQ est un rectangle et, par suite, on a, d'après le théorème de Pythagore [1],

$$\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 = \overline{OM}^2.$$

Or, OP est la valeur absolue du cosinus de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ que j'appelle x, donc son carré est égal au carré de $\cos x$, que l'on écrit $\cos^2 x$. De même OQ étant la valeur absolue du sinus, son carré est égal à celui de ce sinus. Enfin, OM, étant le rayon du cercle trigonométrique, est égal à 1. L'égalité précédente s'écrit donc :

$$[30] \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

59. Théorème. — *La tangente d'un arc est égale au quotient du sinus de cet arc par son cosinus.*

Il s'agit de prouver que l'on a :

$$[31] \qquad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

(1) Voir dans les *Leçons de Géométrie* de M. Hadamard, le théorème du n° 124.

et, pour cela, il suffit de prouver que les deux membres ont même valeur absolue et même signe.

1° Les deux membres ont même signe; car, comme nous l'avons remarqué (n° 41), le signe de la tangente se déduit des signes du sinus et du cosinus par la règle des signes.

2° Les deux membres ont même valeur absolue. Soit, en effet, $\overset{\frown}{AM}$ l'arc x (*fig.* 30); P et Q les projections de M sur les axes $x'x$

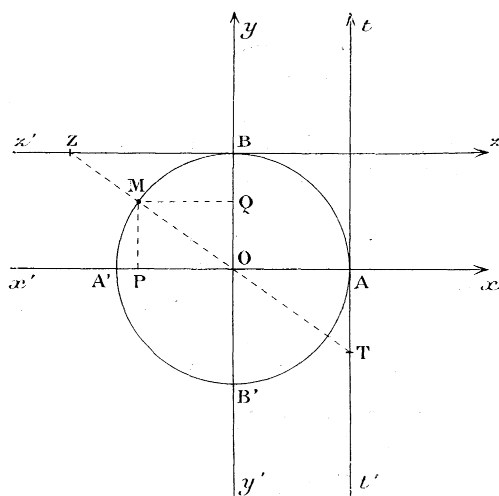


Fig. 30.

et $y'y$; T le point d'intersection de OM avec l'axe des tangentes $t't$. Les deux triangles OPM et OAT sont semblables et on a :

$$\frac{AT}{OA} = \frac{PM}{OP}.$$

Or, $\quad PM = OQ \quad$ et $\quad OA = 1,$

on a donc :

$$AT = \frac{OQ}{OP}$$

et les deux membres de cette égalité sont précisément les valeurs absolues des deux membres de l'égalité [**31**].

60. Théorème. — *La cotangente d'un arc est égale au quotient du cosinus de cet arc par son sinus.*

Pour établir la relation annoncée :

$$[32] \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

nous montrerons que les deux membres ont même valeur absolue et même signe.

1° Les deux membres sont de même signe, cela résulte du tableau de signes du n° 41.

2° Ils ont même valeur absolue. Gardons, en effet, les mêmes notations que dans les deux numéros précédents et soit (*fig.* 30) Z le point où le diamètre OM coupe l'axe $z'z$ des cotangentes. BZ est alors la valeur absolue de $\operatorname{cotg} x = \overline{\mathrm{BZ}}$. Les deux triangles semblables OMQ et OBZ donnent :

$$\frac{\mathrm{BZ}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{MQ}}{\mathrm{OQ}}.$$

Or $\qquad \mathrm{MQ} = \mathrm{OP} \quad$ et $\quad \mathrm{OB} = 1, \qquad$ on a donc :

$$\mathrm{BZ} = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OQ}},$$

ce qui établit que les deux membres de [32] sont égaux en valeur absolue.

Remarque. — La relation [32] pourrait se déduire de la relation [31] en changeant, dans celle-ci, x en $\frac{\pi}{2} - x$. On a, en effet, d'après la relation [31],

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)},$$

ce qui, en tenant compte des formules [29], fournit la relation [32] cherchée.

61. Corollaire. — *La cotangente d'un arc est l'inverse de la tangente de cet arc.*

Car, en rapprochant les égalités [31] et [32], on voit que les deux seconds membres sont inverses l'un de l'autre ; on a donc

$$[33] \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

62. Théorème. — *La sécante d'un arc est l'inverse du cosinus de cet arc.*

Je dis que

$$[34] \qquad \text{séc}\, x \cdot \cos x = 1.$$

1° Cette relation est vraie en signe ; car, en examinant le tableau du n° 41, on voit que le cosinus et la sécante d'un arc sont toujours de même signe.

2° La relation est vraie en valeur absolue. Soit $\overset{\frown}{AM}$ l'arc x (*fig.* 31). Menons en M la tangente au cercle qui coupe l'axe $x'x$ des cosinus

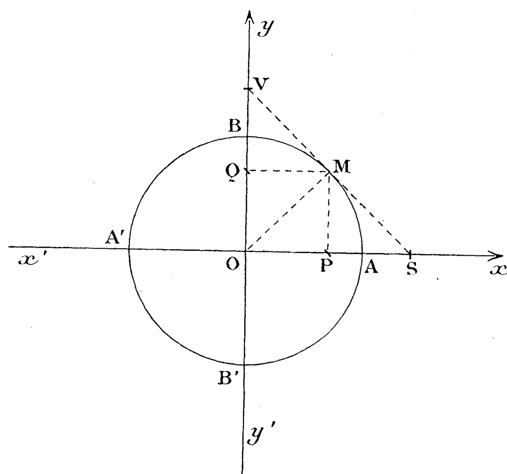


Fig. 31.

en S ; et soit P la projection de M sur cet axe. OS et OP sont, respectivement, les valeurs absolues de séc x et $\cos x$.

Or, dans le triangle rectangle OMS on a (1) :

$$OP \times OS = \overline{OM}^2 = 1,$$

puisque OM est le rayon du cercle.

L'égalité [34] est donc exacte et on a

$$[34]^{bis} \qquad \text{séc}\, x = \frac{1}{\cos x}.$$

(1) Voir dans les *Leçons de Géométrie* de M. Hadamard, le théorème du n° 123.

63. Théorème. — *La cosécante d'un arc est l'inverse du sinus de cet arc.*

Il faut prouver que :

[**35**] $$\text{coséc}\, x \,.\, \sin x = 1.$$

1° Cette relation est vraie en signe; car, d'après le tableau des signes du n° 41, la cosécante et le sinus ont toujours le même signe.

2° La relation est vraie en valeur absolue. Soit en effet V le point où la tangente à l'extrémité M de l'arc (*fig.* 31) coupe l'axe $y'y$ des sinus; et soit Q la projection de M sur cet axe. Les valeurs absolues de $\sin x$ et $\text{coséc}\, x$ sont, respectivement, OQ et OV. Or, dans le triangle rectangle OMV, on a

$$\text{OV} \times \text{OQ} = \overline{\text{OM}}^2 = 1.$$

La relation [**35**] est donc exacte et on en tire :

[**35**]*bis* $$\text{coséc}\, x = \frac{1}{\sin x}.$$

Remarquons encore, ici, que la formule [**35**] peut se déduire de la formule [**34**] en changeant, dans celle-ci, x en $\frac{\pi}{2} - x$ et tenant compte des relations [**29**].

64. Remarque. — Les cinq théorèmes qui précèdent fournissent cinq relations algébriques entre les lignes trigonométriques d'un même arc que nous réunissons ici dans ce tableau :

$$[\text{T}] \left\{ \begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1, \\ \text{tg}\, x &= \frac{\sin x}{\cos x}, \\ \text{cotg}\, x &= \frac{\cos x}{\sin x}, \\ \text{séc}\, x &= \frac{1}{\cos x}, \\ \text{coséc}\, x &= \frac{1}{\sin x}. \end{aligned} \right.$$

Il est facile de démontrer que le tableau [T] fournit toutes les relations algébriques qui peuvent exister entre les lignes trigonométriques d'un même arc; ou, en d'autres termes, que toute autre relation est une *conséquence* de celles-ci. Supposons, en effet, qu'il

puisse exister une relation algébrique (R), entre les six lignes, qui ne soit pas une conséquence de celles du tableau [T]. De la première des relations [T], tirons

$$\sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$$

et portons cette valeur dans les quatre autres; nous aurons ainsi exprimé $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\operatorname{séc} x$ et $\operatorname{coséc} x$ en fonction de $\cos x$. Portons ces valeurs dans la relation (R); cette relation ne contiendra plus que $\cos x$ et, si, comme nous le supposons, elle n'est pas une conséquence du tableau [T], elle ne sera pas une *identité*. On aurait donc, ainsi, une équation en $\cos x$ qui devrait être vérifiée par le cosinus d'un arc quelconque et par conséquent pour une *infinité* de valeurs de l'inconnue; ce qui est impossible.

On peut donc affirmer que toute nouvelle relation algébrique entre les lignes trigonométriques d'un même arc pourra être obtenue en combinant convenablement les relations fondamentales [T].

La relation [**33**] en est un premier exemple.

65. Autres relations. — Des relations fondamentales [T] on peut tirer deux autres relations qui sont d'un usage fréquent.

1° On a :

$$[36] \qquad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{séc}^2 x.$$

En effet, d'après la formule [**31**], on a :

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}.$$

Le numérateur de cette dernière fraction est, en vertu de la relation [**30**], égal à 1 ; et la relation proposée est établie.

2° On a, de même,

$$[37] \qquad 1 + \operatorname{cotg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = \operatorname{coséc}^2 x.$$

De la formule [**32**] on tire, en effet,

$$1 + \operatorname{cotg}^2 x = 1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}.$$

En vertu de la relation [**31**], le numérateur de la dernière fraction est égal à 1.

Remarque. — On peut passer de la formule [**36**] à la formule [**37**] en remplaçant, dans la première, x par $\frac{\pi}{2} - x$ et tenant compte des relations entre les lignes de deux arcs complémentaires [**29**]. La relation [**36**] donne, en effet,

$$1 + \text{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \text{séc}^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

qui devient la relation [**37**] lorsqu'on remplace $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ par $\text{cotg}\, x$, etc.

66. Applications. — Les relations fondamentales [T] permettent de résoudre la question suivante :

Calculer toutes les lignes trigonométriques d'un arc, connaissant l'une d'elles. En effet, si, dans les relations [T], on considère une des lignes comme connue et les autres comme inconnues, on a là un système de cinq équations à cinq inconnues qu'il suffit de résoudre.

Nous traiterons deux exemples.

67. Problème. — *Calculer toutes les lignes trigonométriques d'un arc, connaissant son cosinus.*

La première des relations [T] donne :

$$\sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x}.$$

Portons cette valeur dans les autres et il vient :

$$\text{tg}\, x = \pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x},$$

$$\text{cotg}\, x = \pm \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}},$$

$$\text{séc}\, x = \frac{1}{\cos x},$$

$$\text{cosé}c\, x = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}.$$

Dans toutes ces formules les doubles signes se correspondent.

On trouve, comme on le voit, pour toutes les lignes trigonométriques, sauf la sécante, deux valeurs égales et de signes contraires. Ceci s'explique aisément.

Ce qu'on connaît, en effet, ce n'est pas l'arc x mais *son cosinus.*

Or, comme nous l'avons vu (n° 46), il y a une infinité d'arcs admettant un cosinus donné et ces arcs sont compris dans la formule [**23**] :

$$x = 2k\pi \pm \alpha,$$

α étant l'un d'eux. Ce que nous avons donc trouvé ce sont les lignes trigonométriques de tous ces arcs. Mais on a :

$$\begin{aligned} \sin(2k\pi \pm \alpha) &= \pm \sin\alpha, \\ \operatorname{tg}(2k\pi \pm \alpha) &= \pm \operatorname{tg}\alpha, \\ \operatorname{cotg}(2k\pi \pm \alpha) &= \pm \operatorname{cotg}\alpha, \\ \text{séc}(2k\pi \pm \alpha) &= \text{séc}\,\alpha, \\ \text{coséc}(2k\pi \pm \alpha) &= \pm \text{coséc}\,\alpha; \end{aligned}$$

ce qui montre que tous ces arcs ont deux valeurs, $+\sin\alpha$ et $-\sin\alpha$, pour leurs sinus. De même pour les tangentes, cotangentes et cosécantes ; mais ils ont tous même sécante.

On pourrait encore expliquer ce double signe de la façon suivante :

Nous savons que tous les arcs qui admettent un cosinus donné, et ont même origine A, ont leurs extrémités en l'un de deux certains points M et M', symétriques par rapport à l'axe $x'x$ des cosinus (voir *fig*. 26, page 51).

Il est, alors, aisé de se rendre compte que toutes les lignes trigonométriques des arcs terminés en M sont égales et de signes contraires à celles des arcs terminés en M', sauf le cosinus (qui est donné) et la sécante qui ont même valeur (voir n° 51).

68. Problème. — *Calculer les lignes trigonométriques d'un arc connaissant sa tangente.*

La formule [**36**] donne, de suite,

$$\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}},$$
$$\text{séc}\, x = \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

En portant la valeur de $\cos x$ dans la formule [**31**], on tire :

$$\sin x = \pm \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}},$$

et, par suite,

$$\text{coséc}\, x = \pm \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}{\operatorname{tg} x}.$$

Enfin, la formule [**33**] donne :

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

Comme dans le problème précédent, on trouve pour la majorité des lignes deux valeurs. Ceci s'explique de la même façon.

La donnée est $\operatorname{tg} x$ et ce qu'on a calculé ce sont les autres lignes d'un arc admettant cette tangente. Or, comme nous l'avons appris (n° 48), il y a une infinité d'arcs x admettant une tangente donnée et ces arcs sont compris dans la formule [**25**] :

$$x = k\pi + \alpha,$$

α étant l'un d'eux. Tous ces arcs n'ont pas même sinus, même cosinus. Si k est *pair*, on a :

$$\begin{aligned} \cos(k\pi + \alpha) &= \cos\alpha, \\ \sin(k\pi + \alpha) &= \sin\alpha, \\ \text{séc}(k\pi + \alpha) &= \text{séc}\,\alpha, \\ \text{coséc}(k\pi + \alpha) &= \text{coséc}\,\alpha; \end{aligned}$$

mais, si k est *impair*, on a :

$$\begin{aligned} \cos(k\pi + \alpha) &= -\cos\alpha, \\ \sin(k\pi + \alpha) &= -\sin\alpha, \\ \text{séc}(k\pi + \alpha) &= -\text{séc}\,\alpha, \\ \text{coséc}(k\pi + \alpha) &= -\text{coséc}\,\alpha. \end{aligned}$$

On voit donc bien que les lignes précédentes de tous les arcs x ont deux valeurs égales et de signes contraires.

On expliquerait encore ce double signe en se reportant à la figure 28 (page 52) et en raisonnant comme au n° 53. Car tous les arcs qui admettent une tangente donnée $\overline{\text{AT}}$ ont leurs extrémités en l'un de deux certains points M et M′, diamétralement opposés.

69. Calcul des lignes trigonométriques des arcs $\frac{p\pi}{n}$. — Nous allons montrer que, dès qu'on sait inscrire dans un cercle un polygone régulier de n côtés, on sait aussi calculer *exactement* les lignes trigonométriques des arcs $\frac{p\pi}{n}$, p étant un entier quelconque. Pour cela, il suffit de montrer que l'on sait calculer *une* de

ces lignes, le sinus par exemple, et, alors, grâce aux formules [T], on saura calculer toutes les autres.

70. Théorème. — *Le sinus d'un arc positif, plus petit qu'un quadrant, est égal à la moitié de la mesure de la corde qui sous-tend l'arc double.*

(Cet énoncé suppose que le rayon du cercle est égal à l'unité de longueur.)

Soit, en effet (*fig.* 32) un arc $\overset{\frown}{AM}$ positif, plus petit qu'un quadrant, et abaissons de M les perpendiculaires MQ et MP sur l'axe des sinus $y'y$ et sur l'axe des cosinus $x'x$. Le sinus de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ étant positif, a pour mesure la *longueur* OQ ou la longueur égale MP. Prolongeons MP jusqu'au second point de rencontre M′ avec le cercle. P est le milieu de MM′ et on a :

$$\sin(\overset{\frown}{AM}) = MP = \frac{MM'}{2};$$

ce qui démontre la proposition car MM′ est la corde qui sous-tend l'arc M′AM double de l'arc AM.

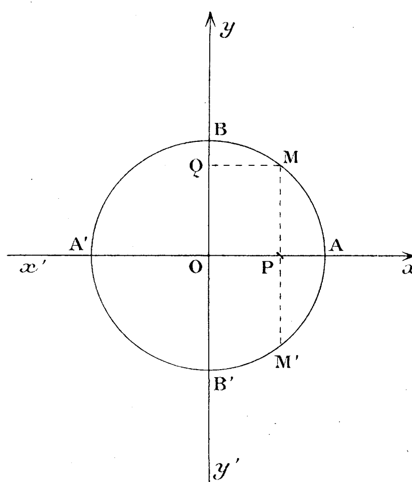


FIG. 32.

71. Corollaire. — *Le sinus de l'arc* $\frac{\pi}{n}$ *est égal à la moitié du côté du polygone régulier convexe de* n *côtés inscrit dans le cercle.*

Car le double de l'arc $\frac{\pi}{n}$ est $\frac{2\pi}{n}$ et c'est l'arc qui est la $n^{ième}$ partie de la circonférence. C'est donc l'arc dont la corde est le côté du polygone régulier convexe de n côtés, inscrit dans le cercle.

Plus généralement, le sinus de l'arc $\frac{p\pi}{n}$ *(*p *premier avec* n *et plus petit que* $\frac{n}{2}$*) est égal à la moitié du côté du polygone régulier étoilé de* n *côtés obtenu en divisant la circonférence en* n *parties et joignant les points de division de* p *en* p.

Car la $n^{ième}$ partie de la circonférence a pour mesure $\frac{2\pi}{n}$. Si on prend p de ces parties, on a un arc valant $\frac{2p\pi}{n}$, ce qui est le double de $\frac{p\pi}{n}$.

72. Applications. — 1° Le côté du *carré* inscrit dans le cercle de rayon 1 a pour mesure $\sqrt{2}$ (1). Ici $n = 4$, on a donc :

$$\sin\frac{\pi}{4} = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On en conclut

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{1 - \sin^2\frac{\pi}{4}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

car, ici, il faut prendre le signe $(+)$ puisque le cosinus d'un arc du premier quadrant est positif. En divisant, on a :

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1;$$

2° Le côté du *triangle équilatéral* est $\sqrt{3}$. Ici, $n = 3$, donc :

$$\sin\frac{\pi}{3} = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

3° Le côté de l'*hexagone* régulier a pour mesure 1. Donc :

$$\sin\frac{\pi}{6} = \sin 30° = \frac{1}{2}.$$

On peut remarquer que, les angles $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$ étant complémentaires, on a :

$$\cos\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$
$$\cos\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(1) Voir l'inscription des polygones réguliers dans les *Leçons de Géométrie* de M. Hadamard, livre premier, chap. VII.

4° Le côté du *décagone* régulier convexe a pour mesure $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
On a donc :

$$\sin\frac{\pi}{10} = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Le côté du décagone régulier étoilé ayant pour mesure $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ et ce décagone s'obtenant en joignant de 3 en 3, on a : $p = 3$, $n = 10$. Donc :

$$\sin\frac{3\pi}{10} = \sin 54^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

5° Le côté du *pentagone* régulier convexe a pour mesure $\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. On a donc :

$$\sin\frac{\pi}{5} = \sin 36^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

Le côté du pentagone régulier étoilé, obtenu en joignant de 2 en 2, étant $\frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$, on a :

$$\sin\frac{2\pi}{5} = \sin 72^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Si on remarque que les angles $\frac{\pi}{10}$ et $\frac{2\pi}{5}$, d'une part, $\frac{3\pi}{10}$ et $\frac{\pi}{5}$, d'autre part, sont complémentaires, on a, de suite, les cosinus de ces angles :

$$\cos\frac{\pi}{10} = \sin\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

$$\cos\frac{3\pi}{10} = \sin\frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

$$\cos\frac{\pi}{5} = \sin\frac{3\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}+1}{4},$$

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Réunissons tous ces résultats en un tableau :

Arcs mesurés avec le rayon		Sinus	Cosinus	Tangente	Arcs en degrés
	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	45°
	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	60°
	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	30°
	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$	36°
	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$	72°
	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	18°
	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	54°

Il est bon de connaître par cœur, sinon tous ces résultats, au moins les premiers.

EXERCICES

15. Calculer les lignes trigonométriques d'un arc, connaissant : 1° son sinus ; 2° sa sécante. — Expliquer les résultats.

16. Calculer les lignes trigonométriques des arcs :

$$\frac{\pi}{8},\quad \frac{\pi}{16},\quad \frac{\pi}{15},\quad \frac{2\pi}{15},\quad \frac{4\pi}{15},\quad \frac{7\pi}{15}.$$

17. Démontrer que la valeur de

$$2(\cos^6 x + \sin^6 x) - 3(\cos^4 x + \sin^4 x)$$

ne dépend pas de x.

18. Vérifier que, quel que soit x, positif, on a :

$$\text{arc sin}\sqrt{\frac{x}{x+a}} = \text{arc tg}\sqrt{\frac{x}{a}},$$

a étant positif et les déterminations de arc sin. et arc tg. étant comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Vérifier les identités :

$$\cot g^2 x \cos^2 x = \cot g^2 x - \cos^2 x,$$
$$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\cot g\, x + \cot g\, y} = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y,$$
$$\text{séc}^2 x \,\text{coséc}^2 x = \text{séc}^2 x + \text{coséc}^2 x,$$
$$\frac{\cos^2 x - \sin^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} = \cot g^2 x \cot g^2 y - 1.$$

CHAPITRE VI

ADDITION ET SOUSTRACTION DES ARCS

73. Énoncé du problème. — Le problème dit de l'addition et de la soustraction des arcs est le suivant :

Connaissant les lignes trigonométriques de plusieurs arcs, calculer, en fonction de ces lignes, les lignes trigonométriques d'une somme algébrique de ces arcs.

Comme la sécante, la cosécante et la cotangente sont, respectivement, les inverses du cosinus, du sinus et de la tangente, il suffira de traiter la question pour les trois dernières lignes.

74. Somme de deux arcs. — Calcul de $\cos(a + b)$. — Soient a et b deux arcs. Portons, sur le cercle trigonométrique (*fig.* 33), un arc $\overset{\frown}{AM}$ égal à a. Puis, du point M comme origine, portons un nouvel arc $\overset{\frown}{MN}$ égal à b. D'après la formule [**9**], on a :

$$\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{AM} + \overset{\frown}{MN} = a + b.$$

L'une des déterminations de l'arc $\overset{\frown}{AN}$ est donc $a + b$.

Les arcs $\overset{\frown}{AM}$ et $\overset{\frown}{AN}$, ayant pour origine A, l'axe de leurs cosinus est l'axe ox qui a pour segment directeur $\overline{OA}$.

L'arc $\overset{\frown}{MN}$ ayant pour origine M, son axe des cosinus est l'axe ox_1

qui a pour segment directeur $\overline{\mathrm{OM}}$ et son axe des sinus est un axe oy_1 tel que

$$\widehat{ox_1, oy_1} = +\frac{\pi}{2}.$$

Abaissons du point N les perpendiculaires NP et NQ sur ox_1 et oy_1. Par définition du cosinus et du sinus, on a :

$$\overline{\mathrm{OP}} = \cos b,$$
$$\overline{\mathrm{OQ}} = \sin b.$$

Ceci posé, le vecteur (ON) est la résultante (n° 2, *Rem.*) des vecteurs (OP) et (OQ). On a donc, en appliquant le théorème des

Fig. 33.

projections (n° 8) et en projetant ces trois vecteurs sur un axe quelconque :

$$(1) \qquad \text{proj.}\,(\overline{\mathrm{ON}}) = \text{proj.}\,(\overline{\mathrm{OP}}) + \text{proj.}\,(\overline{\mathrm{OQ}}).$$

Projetons sur l'axe $x'x$. On a, par définition du cosinus,

$$(2) \qquad \text{proj.}\,(\overline{\mathrm{ON}}) = \cos \overset{\frown}{\mathrm{AN}} = \cos(a+b).$$

D'après le théorème fondamental du n° 44, la projection du

segment $\overline{OP}$, porté par l'axe ox_1, est égale à ce segment multiplié par le cosinus de l'angle $\widehat{ox, ox_1}$. On a donc

$$(3) \qquad \text{proj. } \overline{OP} = \overline{OP} \cos(\widehat{ox, ox_1}) = \cos b \cos a,$$

car l'angle $\widehat{ox, ox_1}$ a même mesure que l'arc $\overset{\frown}{AM} = a$.

Le segment $\overline{OQ}$ étant porté par l'axe oy_1, on a aussi :

$$\text{proj. } (\overline{OQ}) = \overline{OQ} \cos(\widehat{ox, oy_1}).$$

Or, on a, d'après la formule [**15**],

$$\widehat{ox, oy_1} = \widehat{ox, ox_1} + \widehat{ox_1, oy_1} = a + \frac{\pi}{2}.$$

On en conclut

$$(4) \qquad \text{proj. } (\overline{OQ}) = \sin b \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin b \sin a.$$

Les égalités (1), (2), (3) et (4) donnent, alors, la formule cherchée :

$$[\mathbf{38}] \qquad \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

qui donne $\cos(a + b)$ connaissant $\cos a$, $\sin a$, $\cos b$ et $\sin b$.

75. Calcul de $\sin(a + b)$. — Conservons les mêmes notations qu'au numéro précédent et soit (*fig.* 33) $y'y$ l'axe des sinus relatif aux arcs d'origine A. On a :

$$\widehat{ox, oy} = +\frac{\pi}{2}.$$

Ceci posé, projetons le vecteur (ON), résultante des vecteurs (OP) et (OQ), sur $y'y$.

On aura, par définition du sinus,

$$(5) \qquad \text{proj. } (\overline{ON}) = \sin \overset{\frown}{AN} = \sin(a + b).$$

Le segment $\overline{OP}$ étant porté par l'axe ox_1, on a, en vertu du théorème fondamental (n° 44), en projetant sur oy,

$$\text{proj. } (\overline{OP}) = \overline{OP} \cos(\widehat{oy, ox_1}).$$

Or, on a, d'après la formule [14],

$$\widehat{oy, ox_1} = \widehat{ox, ox_1} - \widehat{ox, oy} = a - \frac{\pi}{2};$$

et, par suite,

(6) $\quad$ proj. $(\overline{\mathrm{OP}}) = \cos b \cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right) = \cos b \sin a$ [1].

Enfin, $\overline{\mathrm{OQ}}$ étant porté par oy_1, on a en projetant sur oy,

$$\text{proj.}\ (\overline{\mathrm{OQ}}) = \overline{\mathrm{OQ}} \cos (\widehat{oy, oy_1}).$$

Mais, on a,

$$\widehat{oy, oy_1} = \widehat{oy, ox} + \widehat{ox, ox_1} + \widehat{ox_1, oy_1},$$

$$\widehat{oy, oy_1} = -\frac{\pi}{2} + a + \frac{\pi}{2} = a.$$

On en conclut que

(7) $\quad$ proj. $(\overline{\mathrm{OQ}}) = \sin b \cos a.$

Comme

$$\text{proj.}\ (\overline{\mathrm{ON}}) = \text{proj.}\ (\overline{\mathrm{OP}}) + \text{proj.}\ (\overline{\mathrm{OQ}}),$$

Les formules (5), (6) et (7) donnent :

[**39**] $\quad \sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a,$

qui donne $\sin(a + b)$ en fonction de $\sin a$, $\sin b$, $\cos a$ et $\cos b$.

Remarque. — La formule [**39**] aurait pu se déduire de la formule [**38**] de la façon suivante :

Appliquons aux deux arcs $\frac{\pi}{2} + a$ et b la formule [**38**] qui donne le cosinus de leur somme, on a :

(8) $\quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + a + b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) \cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) \sin b.$

[1] Car on a

$$\cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right),$$

puisque deux arcs égaux et de signes contraires ont même cosinus et, par suite,

$$\cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right) = \sin a.$$

Or, d'après les formules du n° 55, on a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a + b\right) = -\sin(a + b),$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a.$$

En remplaçant dans l'égalité (8) et changeant les signes des deux membres, on trouve la formule [**39**].

76. Calcul de $\operatorname{tg}(a + b)$. — Pour avoir $\operatorname{tg}(a + b)$, il suffit de diviser, membre à membre, les formules [**38**] et [**39**] et il vient :

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}.$$

Divisons les deux termes de cette dernière fraction par $\cos a \cos b$ et nous obtenons :

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\dfrac{\sin a}{\cos a} + \dfrac{\sin b}{\cos b}}{1 - \dfrac{\sin a}{\cos a}\dfrac{\sin b}{\cos b}}.$$

Ceci donne, enfin, la formule cherchée :

$$[\mathbf{40}] \qquad \operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b},$$

qui donne $\operatorname{tg}(a + b)$ en fonction de $\operatorname{tg} a$ et $\operatorname{tg} b$.

77. Différence de deux arcs. — Les formules [**38**], [**39**] et [**40**] sont absolument générales et s'appliquent quels que soient les arcs a et b, car il n'a été fait aucune restriction, sur la nature de ces arcs, dans les démonstrations qui précèdent. On peut donc les appliquer aux deux arcs a et $-b$ et on a ainsi les lignes de la différence $a - b$:

$$\cos(a - b) = \cos a \cos(-b) - \sin a \sin(-b),$$
$$\sin(a - b) = \sin a \cos(-b) + \sin(-b) \cos a,$$
$$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg}(-b)}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg}(-b)}.$$

Or, d'après les formules [**26**], on a :

$$\cos(-b) = \cos b,$$
$$\sin(-b) = -\sin b,$$
$$\operatorname{tg}(-b) = -\operatorname{tg} b,$$

et les formules précédentes deviennent :

[**38**]*bis* $$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$
[**39**]*bis* $$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a,$$
[**40**]*bis* $$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.$$

REMARQUE. — Si, dans la formule [**38**]*bis* on fait $a = b$, on retrouve, en observant que $\cos 0 = 1$, la formule [**30**]

$$1 = \cos^2 a + \sin^2 a.$$

78. Somme de plusieurs arcs. — Des formules qui donnent la somme de deux arcs, il est facile de conclure celles qui fournissent les lignes trigonométriques de la somme d'un nombre quelconque d'arcs en fonction des lignes de ces arcs.

Prenons d'abord une somme $a + b + c$ de trois arcs. Si on considère $a + b + c$ comme la somme de $a + b$ et de c, on a, en appliquant les formules qui précèdent :

$$\cos(a+b+c) = \cos(a+b)\cos c - \sin(a+b)\sin c,$$
$$\sin(a+b+c) = \sin(a+b)\cos c + \sin c \cos(a+b),$$
$$\operatorname{tg}(a+b+c) = \frac{\operatorname{tg}(a+b) + \operatorname{tg} c}{1 - \operatorname{tg}(a+b)\operatorname{tg} c}.$$

Remplaçons, dans les seconds membres, $\cos(a+b)$, $\sin(a+b)$, $\operatorname{tg}(a+b)$ par leurs valeurs tirées des formules [**38**], [**39**], [**40**] et il vient, toutes simplifications faites :

$$\cos(a+b+c) = \cos a \cos b \cos c - \sin a \sin b \cos c$$
$$- \sin b \cos c \cos a - \sin c \cos a \cos b,$$
$$\sin(a+b+c) = \sin a \cos b \cos c + \sin b \cos c \cos a$$
$$+ \sin c \cos a \cos b - \sin a \sin b \sin c,$$
$$\operatorname{tg}(a+b+c) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} c \operatorname{tg} a}.$$

De même, pour calculer les lignes trigonométriques de l'arc $a + b + c + d$, on considère cet arc comme la somme de $a + b + c$

et de d. On appliquera les formules de la somme de deux arcs ; puis, dans les seconds membres, on remplacera les lignes de $a+b+c$ par les valeurs ci-dessus.

Et ainsi de suite. On calculera, de proche en proche, les lignes d'une somme d'autant d'arcs que l'on voudra.

79. Formules générales [1]. — Soient m arcs a, b, c, ... k, l. Posons

$$T_1 = \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c + \ldots + \operatorname{tg} k + \operatorname{tg} l,$$
$$T_2 = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c + \operatorname{tg} c \operatorname{tg} a + \ldots + \operatorname{tg} k \operatorname{tg} l,$$

T_2 désignant la somme des produits deux à deux des tangentes des m arcs. D'une manière générale, désignons par T_p la somme des produits p à p de ces m tangentes ; et, enfin, soit

$$T_m = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c \ldots \operatorname{tg} k \operatorname{tg} l$$

le produit des m tangentes.

Nous allons montrer que l'on a :

$$[\alpha] \qquad \cos(a+b+c+\ldots+k+l) = \cos a \cos b \cos c \ldots \cos k \cos l\,[1 - T_2 + T_4 - T_6 + \ldots],$$

$$[\beta] \qquad \sin(a+b+c+\ldots+k+l) = \cos a \cos b \cos c \ldots \cos k \cos l\,[T_1 - T_3 + T_5 - T_7 + \ldots],$$

$$[\gamma] \qquad \operatorname{tg}(a+b+c+\ldots+k+l) = \frac{T_1 - T_3 + T_5 - T_7 + \ldots}{1 - T_2 + T_4 - T_6 + \ldots}.$$

Dans le crochet de la formule [α] figurent toutes celles des sommes T_1, T_2, T_3, ... T_m dont les indices sont pairs, prises dans l'ordre des indices croissants et, alternativement, avec les signes (—) et (+). Dans le crochet du second membre de la formule [β] figurent toutes celles de ces sommes dont les indices sont impairs, dans l'ordre des indices croissants et, alternativement, avec les signes (+) et (—).

La formule [γ] est une conséquence évidente des formules [α] et [β] que l'on obtient en les divisant membre à membre ; il suffit donc de démontrer les formules [α] et [β].

80. Lemme. — T'_p *désignant la somme des produits* p *à* p *des* $(m-1)$ *tangentes* $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{tg} b$, $\operatorname{tg} c$, ... $\operatorname{tg} k$ *et* T_p *la somme des produits* p *à* p *des* m *tangentes* $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{tg} b$, $\operatorname{tg} c$, ... $\operatorname{tg} k$, $\operatorname{tg} l$, *on a les relations :*

$$(1) \qquad T_1 = T'_1 + \operatorname{tg} l,$$
$$(2) \qquad T_p = T'_p + \operatorname{tg} l .\, T'_{p-1},$$
$$(3) \qquad T_m = \operatorname{tg} l .\, T'_{m-1}.$$

[1] On pourra passer ce numéro dans une première lecture.

La relation (1) est évidente car, si à la somme T'_1 des $(m-1)$ tangentes $\operatorname{tg} a$, ... $\operatorname{tg} k$ on ajoute $\operatorname{tg} l$, on obtient, évidemment, la somme T_1 des m tangentes $\operatorname{tg} a$, ... $\operatorname{tg} k$, $\operatorname{tg} l$.

En second lieu, soit T_p $(p < m)$ la somme des produits p à p des m tangentes $\operatorname{tg} a$, ... $\operatorname{tg} k$, $\operatorname{tg} l$. Dans cette somme, réunissons ensemble tous les produits qui ne contiennent pas $\operatorname{tg} l$, ce sera évidemment la somme T'_p des produits p à p des $(m-1)$ tangentes autres que $\operatorname{tg} l$. Tous les produits restants contiendront $\operatorname{tg} l$; mettons-y $\operatorname{tg} l$ en facteur. La somme que multipliera $\operatorname{tg} l$ sera une somme de produits de $(p-1)$ tangentes autres que $\operatorname{tg} l$ et il est aisé de se rendre compte que cette somme comprendra, sans omission ni répétition, tous les produits de cette forme. Cette somme est donc T'_{p-1} et on a bien :

$$T_p = T'_p + \operatorname{tg} l . T'_{p-1}.$$

Enfin, l'égalité (3) est manifeste; car si on multiplie le produit T'_{m-1} des $(m-1)$ tangentes $\operatorname{tg} a$, ... $\operatorname{tg} k$ par $\operatorname{tg} l$, on obtient le produit T_m des m tangentes $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{tg} b$, ... $\operatorname{tg} k$, $\operatorname{tg} l$.

81. Démonstration. — Ceci posé, pour démontrer que les formules [α] et [β] sont exactes, nous allons d'abord vérifier qu'elles sont exactes dans le cas de $m = 2$. Si, en effet, on met dans les formules [**38**] et [**39**] le produit $\cos a \cos b$ en facteur, on trouve :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b \left[1 - \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}\right],$$
$$\sin(a+b) = \cos a \cos b \left[\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b}\right].$$

Ce qui s'écrit :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b\,[1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b] = \cos a \cos b\,[1 - T_2],$$
$$\sin(a+b) = \cos a \cos b\,[\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b] = \cos a \cos b\, T_1.$$

On pourrait encore vérifier l'exactitude de ces formules dans le cas de $m = 3$. En mettant, dans les formules du n° 78, $\cos a \cos b \cos c$ en facteur, on trouverait, de même,

$$\cos(a+b+c) = \cos a \cos b \cos c\,[1 - T_2],$$
$$\sin(a+b+c) = \cos a \cos b \cos c\,[T_1 - T_3].$$

Pour prouver que les formules [α] et [β] sont générales, nous allons prouver que, si elles sont vraies pour $m-1$ arcs, elles sont vraies pour m.

Supposons, en effet, qu'on ait, en conservant les notations du lemme, pour $(m-1)$ arcs a, b, ... k,

$$(4) \quad \cos(a+b+\ldots+k) = \cos a \cos b \ldots \cos k\,[1 - T'_2 + T'_4 - T'_6 + \ldots],$$
$$(5) \quad \sin(a+b+\ldots+k) = \cos a \cos b \ldots \cos k\,[T'_1 - T'_3 + T'_5 - T'_7 + \ldots].$$

Prenons un arc l de plus et considérons $a+b+\dots+k+l$ comme la somme de $a+b+\dots+k$ et de l. On aura, en appliquant les formules [38] et [39],

$$\cos(a+b+\dots+k+l) = \cos(a+b+\dots+k)\cos l - \sin(a+b+\dots+k)\sin l,$$

$$\sin(a+b+\dots+k+l) = \sin(a+b+\dots+k)\cos l + \cos(a+b+\dots+k)\sin l.$$

Remplaçons, dans ces formules, $\cos(a+b+\dots+k)$ et $\sin(a+b+\dots+k)$ par leurs valeurs (4) et (5) et mettons $\cos a \cos b \dots \cos k \cos l$ en facteur, nous trouverons :

$$\cos(a+b+\dots+k+l) =$$
$$\cos a \cos b \dots \cos k \cos l\left[1 - T'_2 + T'_4 - T'_6 + \dots - (T'_1 - T'_3 + T'_5 - T'_7 + \dots)\operatorname{tg} l\right],$$
$$\sin(a+b+\dots+k+l) =$$
$$\cos a \cos b \dots \cos k \cos l\left[T'_1 - T'_3 + T'_5 - T'_7 + \dots + (1 - T'_2 + T'_4 - T'_6 + \dots)\operatorname{tg} l\right].$$

Ceci s'écrit :

$$\cos(a+b+\dots+k+l) =$$
$$\cos a \cos b \dots \cos k \cos l\left[1 - (T'_2 + \operatorname{tg} l\, T'_1) + (T'_4 + \operatorname{tg} l\, T'_3) - (T'_6 + \operatorname{tg} l\, T'_5) + \dots\right],$$
$$\sin(a+b+\dots+k+l) =$$
$$\cos a \cos b \dots \cos k \cos l\left[(T'_1 + \operatorname{tg} l) - (T'_3 + \operatorname{tg} l\, T'_2) + (T'_5 + \operatorname{tg} l\, T'_4) - \dots\right].$$

En vertu du lemme et des formules (1), (2) et (3), on a :

$$T'_1 + \operatorname{tg} l = T_1,$$
$$T'_2 + \operatorname{tg} l\, T'_1 = T_2,$$
$$T'_3 + \operatorname{tg} l\, T'_2 = T_3,$$
$$\dots\dots\dots ,$$

et les égalités qui précèdent deviennent :

$$\cos(a+b+\dots+k+l) =$$
$$\cos a \cos b \dots \cos k \cos l\,[1 - T_2 + T_4 - T_6 + \dots],$$

$$\sin(a+b+\dots+k+l) =$$
$$\cos a \cos b \dots \cos k \cos l\,[T_1 - T_3 + T_5 - T_7 + \dots],$$

qui sont les formules [α] et [β] pour m arcs.

La proposition énoncée étant vraie pour 2 et 3 arcs, sera vraie pour 4 arcs. Étant vraie pour $m=4$, elle est vraie pour $m=5$; et ainsi de suite, elle est générale.

Remarque. — Si, dans les formules [α] et [β] on remplace les tangentes par leurs valeurs $\frac{\sin a}{\cos a}$, $\frac{\sin b}{\cos b}$ ..., et qu'on effectue le produit, les dénominateurs disparaissent.

EXERCICES

19. Démontrer les égalités :

$$\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \sin^2 a,$$
$$\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b,$$
$$\cos(a+b)\sin(a-b) = \sin a \cos a - \sin b \cos b,$$
$$\sin a \sin(b-c) + \sin b \sin(c-a) + \sin c \sin(a-b) = 0,$$
$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{\sin a \cos a - \sin b \cos b},$$
$$\frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b} - \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a} + \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c} - \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} b} + \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} a} - \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c} =$$
$$\frac{\sin(a-b)\sin(b-c)\sin(c-a)}{\sin a \sin b \sin c \cos a \cos b \cos c},$$

$$\cos(b-c)\cos(b+c+d) + \cos a \cos(a+d) =$$
$$\cos(c-a)\cos(c+a+d) + \cos b \cos(b+d) =$$
$$\cos(a-b)\cos(a+b+d) + \cos c \cos(c+d) =$$
$$\cos a \cos(a+d) + \cos b \cos(b+d) + \cos c \cos(c+d) - \cos d,$$

$$\sin b \sin c \sin(b-c)\left[\sin^2 b + \sin^2 c + \sin^2(b-c)\right]$$
$$+ \sin c \sin a \sin(c-a)\left[\sin^2 c + \sin^2 a + \sin^2(c-a)\right]$$
$$+ \sin a \sin b \sin(a-b)\left[\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2(a-b)\right]$$
$$+ \sin(b-c)\sin(c-a)\sin(a-b)\left[\sin^2(b-c) + \sin^2(c-a) + \sin^2(a-b)\right] = 0.$$

20. Prouver que l'on a :

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4},$$
$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4},$$
$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2p-1} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2p+1} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2p^2}.$$

Dans ces égalités on prend pour détermination de l'arc tangente, celle qui est comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

21. A, B, C étant tels que
$$A + B + C = 90°,$$
on a :
$$\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} C \operatorname{tg} A = 1.$$

22. A, B, C étant les angles d'un triangle, on a :

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C,$$
$$2(1 + \cos A \cos B \cos C) = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C,$$
$$\sin A \cos B \cos C + \sin B \cos C \cos A + \sin C \cos A \cos B = \sin A \sin B \sin C,$$
$$\cos A \sin B \sin C + \cos B \sin C \sin A + \cos C \sin A \sin B = 1 + \cos A \cos B \cos C,$$
$$\sin^3 A \sin(B-C) + \sin^3 B \sin(C-A) + \sin^3 C \sin(A-B) = 0,$$
$$\sin^3 A \cos(B-C) + \sin^3 B \cos(C-A) + \sin^3 C \cos(A-B) = 3 \sin A \sin B \sin C.$$

23. Démontrer que l'expression

$$\cos^2 x - 2\cos x \cos a \cos(a+x) + \cos^2(a+x)$$

ne dépend pas de x.

CHAPITRE VII

MULTIPLICATION ET DIVISION DES ARCS

82. Énoncé du problème. — Le problème général de la multiplication ou de la division des arcs est le suivant :

Connaissant les lignes trigonométriques d'un arc a, *calculer, en fonction de ces lignes, les lignes trigonométriques des arcs* na *ou* $\frac{a}{n}$.

Nous nous contenterons évidemment de traiter ces questions pour les trois lignes fondamentales, le cosinus, le sinus et la tangente.

83. Multiplication des arcs. — Duplication. — Pour avoir les formules qui donnent les lignes trigonométriques de l'arc $2a$, il suffit de faire dans les formules [**38**], [**39**] et [**40**] $b = a$; car, alors, $a + b$ devient $a + a = 2a$.

On obtient ainsi :

[**41**] $$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a,$$
[**42**] $$\sin 2a = 2 \sin a \cos a,$$
[**43**] $$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}.$$

On peut observer, qu'en tenant compte de la relation

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1,$$

$\cos 2a$ peut s'exprimer *rationnellement* soit en fonction de $\cos a$ seulement, soit en fonction de $\sin a$. La formule [**41**] donne, en effet,

$$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1,$$

ou

$$\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a.$$

84. Cas général. — Il est facile, ayant calculé les lignes de l'arc $2a$, de calculer, de proche en proche, celles des arcs $3a$, $4a$, etc. En effet, si l'on considère $3a$ comme la somme $2a + a$, on aura :

$$\cos 3a = \cos 2a \cos a - \sin 2a \sin a,$$
$$\sin 3a = \sin 2a \cos a + \sin a \cos 2a,$$
$$\operatorname{tg} 3a = \frac{\operatorname{tg} 2a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} 2a}.$$

En remplaçant, dans ces égalités, $\cos 2a$, $\sin 2a$ et $\operatorname{tg} 2a$ par leurs valeurs [**41**], [**42**] et [**43**], il vient, toutes simplifications faites,

$$(1) \qquad \cos 3a = \cos^3 a - 3 \cos a \sin^2 a,$$
$$(2) \qquad \sin 3a = 3 \sin a \cos^2 a - \sin^3 a,$$
$$(3) \qquad \operatorname{tg} 3a = \frac{3 \operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 a},$$

on aurait pu, d'ailleurs, obtenir encore ces formules en faisant dans celles du n° 78, qui donnent les lignes de l'arc $a + b + c$,

$$a = b = c.$$

En tenant compte des égalités

$$\cos^2 a = 1 - \sin^2 a,$$
$$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a,$$

on peut écrire aussi :

$$(4) \qquad \cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a,$$
$$(5) \qquad \sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a.$$

Connaissant les lignes trigonométriques de l'arc $3a$, on calculera, de même, celles de l'arc $4a$ en considérant $4a$ comme la somme $3a + a$ et en remplaçant dans le second membre $\cos 3a$, $\sin 3a$, $\operatorname{tg} 3a$ par leurs valeurs (1), (2), (3). Et ainsi de suite.

Pour avoir des formules générales donnant $\cos ma$, $\sin ma$, $\operatorname{tg} ma$, il suffirait, dans les formules [α], [β] et [γ], du n° 79, de faire les m arcs $a, b, c \ldots k, l$ égaux et égaux à a (voir le chapitre II de l'*Appendice*).

85. Division des arcs. — Élémentairement, on ne peut résoudre le problème de la division d'un arc que dans les cas où le diviseur n est une *puissance de* 2. Ce sont, en effet, les seuls cas qui conduisent à résoudre des équations dont le degré ne dépasse pas le second. Nous ne traiterons donc, ici, que ces cas-là, mais nous indiquerons cependant la marche générale à suivre [1].

Supposons qu'on se donne une ligne trigonométrique, par exemple $\cos a$, et qu'on veuille calculer les lignes de l'arc $\frac{a}{n}$. Pour cela, on écrira la formule qui donne $\cos na$ en fonction de $\cos a$ et $\sin a$. Dans cette formule on remplacera a par $\frac{a}{n}$ et on obtiendra une

(1) Voir le chapitre II de l'*Appendice*, pour les autres cas.

relation entre $\cos a$, $\cos\frac{a}{n}$ et $\sin\frac{a}{n}$. En adjoignant à cette relation l'égalité

$$\cos^2\frac{a}{n}+\sin^2\frac{a}{n}=1,$$

on aura deux équations pour déterminer les deux inconnues

$$\cos\frac{a}{n} \quad \text{et} \quad \sin\frac{a}{n}.$$

Si on se donnait $\operatorname{tg} a$, en remplaçant, dans la formule qui donne $\operatorname{tg} na$ en fonction de $\operatorname{tg} a$, a par $\frac{a}{n}$, on aurait, de suite, une équation donnant $\operatorname{tg}\frac{a}{n}$.

Appliquons ces généralités au cas de $n=2$.

86. Problème. — *Connaissant* $\cos a$ *calculer les lignes trigonométriques de l'arc* $\frac{a}{2}$.

On a, d'après la formule [**41**],

$$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a.$$

Remplaçons, dans cette égalité, a par $\frac{a}{2}$ et nous avons

$$(1) \qquad \cos^2\frac{a}{2}-\sin^2\frac{a}{2}=\cos a$$

qui, avec la relation

$$(2) \qquad \cos^2\frac{a}{2}+\sin^2\frac{a}{2}=1,$$

fournit un système de deux équations à deux inconnues $\cos\frac{a}{2}$ et $\sin\frac{a}{2}$. En ajoutant et retranchant, membre à membre, les équations (1) et (2), on en tire d'abord les égalités importantes :

$$[\mathbf{44}] \qquad 2\cos^2\frac{a}{2}=1+\cos a,$$

$$[\mathbf{45}] \qquad 2\sin^2\frac{a}{2}=1-\cos a.$$

Ces relations donnent, enfin,

$$(3)\qquad \begin{cases} \cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}, \\ \sin\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}, \end{cases}$$

qui, divisées membre à membre, donnent

$$(4)\qquad \operatorname{tg}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}.$$

Les formules (3) et (4) résolvent la question.

Chacune de ces égalités fournit *deux* valeurs pour chacune des trois lignes trigonométriques. C'est là un résultat facile à expliquer et cette explication peut se donner sous deux formes différentes.

Ce qu'on se donne, en effet, *ce n'est pas l'arc* a, *mais son cosinus*. Le problème résolu est donc le suivant, trouver les lignes trigonométriques des moitiés de *tous* les arcs qui admettent un cosinus donné.

1° On sait que, si α désigne l'un des arcs dont le cosinus est égal à $\cos a$, tous les arcs a, admettant ce cosinus, sont compris (n° 46) dans la formule [**23**]

$$a = 2k\pi \pm \alpha,$$

où k est un entier, positif, négatif ou nul. Les *moitiés* de tous ces arcs sont donc données par la formule :

$$\frac{a}{2} = k\pi \pm \frac{\alpha}{2},$$

Si k est *pair*, on a :

$$\sin\left(k\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$\cos\left(k\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2},$$

$$\operatorname{tg}\left(k\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) = \pm\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Si k est *impair*, on a :

$$\sin\left(k\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) = \mp \sin\frac{\alpha}{2},$$

$$\cos\left(k\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) = -\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$\operatorname{tg}\left(k\pi \pm \frac{\alpha}{2}\right) = \pm \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\ (^1).$$

On en conclut que les sinus, cosinus et tangentes des arcs considérés ont, chacun, respectivement, deux valeurs égales et de signes contraires $\pm \sin\frac{\alpha}{2}$, $\pm \cos\frac{\alpha}{2}$, $\pm \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. C'est ce que nous donnent les formules (3) et (4).

2° On peut encore raisonner de la façon suivante.

Faisons d'abord une remarque qui nous sera utile dans la suite. Soient A et M (*fig.* 34) deux points du cercle trigonométrique. Soit N le milieu de l'arc géométrique AM, décrit par un mobile allant de A en M dans le sens positif ; N_1 le point diamétralement opposé à N. Les moitiés des diverses déterminations de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ sont les diverses déterminations des arcs $\overset{\frown}{AN}$ et $\overset{\frown}{AN_1}$. Soit, en effet, a le plus petit arc positif $\overset{\frown}{AM}$, de la façon même dont nous avons choisi le point N, l'arc $\frac{a}{2}$, qui a son origine en A, est terminé en N. Toutes les déterminations de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ s'obtiennent en ajoutant à a un multiple entier (positif ou négatif) de circonférences. Les moitiés de toutes ces déterminations s'obtiennent donc en ajoutant à $\frac{a}{2}$ un multiple entier (positif ou négatif) de *demi*-circonférences. Si ce multiple est pair, l'arc correspondant sera congru à $\frac{a}{2}$ et sera terminé en N. Si ce multiple est impair, l'arc sera congru à $\frac{a}{2} + \pi$ et sera terminé en N_1 (n° 18).

Ceci posé, soit $x'x$ (*fig.* 34) l'axe des cosinus des arcs d'origine A. Prenons, sur cet axe, le segment $\overline{OP}$ égal à $\cos a$. Tous les arcs a

(1) Dans ces six égalités les signes supérieurs et inférieurs se correspondent.

sont terminés aux points M et M′ situés sur la perpendiculaire en P à xx'. Les arcs $\frac{a}{2}$ sont donc, d'après la remarque précédente, terminés en N ou N_1, N′ ou N'_1, N étant le milieu de l'arc géométrique AM et N'_1 le milieu de l'arc AM′. Or, N et N'_1 étant symétriques par rapport à xx', la figure NN′ $N_1N'_1$ est un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes $x'x$ et $y'y$. Il en résulte que les arcs terminés aux

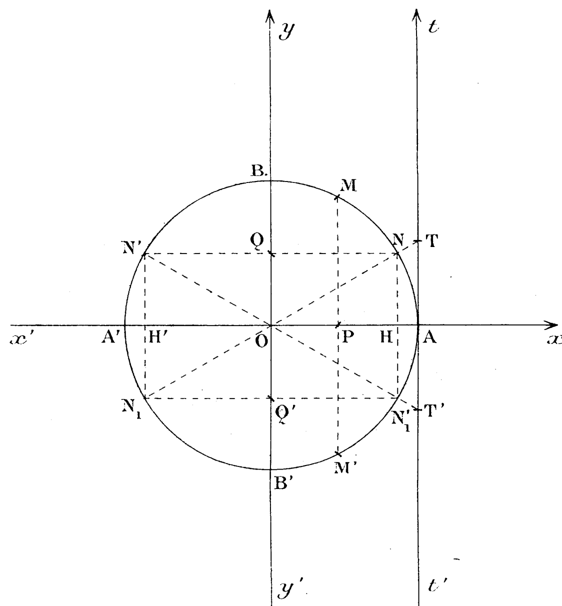


Fig. 34.

quatre sommets de ce rectangle n'ont que deux valeurs (égales et de signes contraires) pour leurs cosinus $\overline{OH}$ et $\overline{OH'}$; deux valeurs pour les sinus, $\overline{OQ}$ et $\overline{OQ'}$; deux valeurs pour les tangentes $\overline{AT}$ et $\overline{AT'}$.

Remarque. — Si, en même temps qu'on se donne le cosinus, on se donne aussi l'arc, l'ambiguïté du signe disparaît. Car dès qu'on connaît l'arc, on sait (voir le tableau du nº 41) quel est son signe suivant le quadrant où il se termine.

Exemple. — *Calculer les lignes trigonométriques de l'arc* $\frac{\pi}{8}$ *sachant que*

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

L'arc $\frac{\pi}{8}$ étant terminé dans le premier quadrant, toutes ses lignes sont positives; il faudra donc dans les formules (3) et (4) prendre le signe (+). En appliquant ces formules, on a :

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

$$\text{tg}\,\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2}-1 \text{ (1)}.$$

87. Problème. — *Calculer les lignes trigonométriques de l'arc* $\frac{a}{2}$ *connaissant* $\sin a$.

D'après la formule [**42**], on a ;

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a.$$

Remplaçons, dans cette égalité, a par $\frac{a}{2}$ et il vient

$$(1) \qquad 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} = \sin a,$$

qui, avec la relation

$$(2) \qquad \sin^2\frac{a}{2} + \cos^2\frac{a}{2} = 1,$$

fournit un système de deux équations à deux inconnues $\sin\frac{a}{2}$ et $\cos\frac{a}{2}$.

(1) On a, en effet,

$$\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$$

puisque

$$(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2}) = 4-(\sqrt{2})^2 = 4-2 = 2.$$

Pour résoudre ce système, ajoutons et retranchons successivement l'égalité (1) de l'égalité (2), nous avons

$$\sin^2\frac{a}{2} + \cos^2\frac{a}{2} + 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} = 1 + \sin a,$$

$$\sin^2\frac{a}{2} + \cos^2\frac{a}{2} - 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} = 1 - \sin a.$$

Ceci s'écrit :

$$\left[\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2}\right]^2 = 1 + \sin a,$$

$$\left[\sin\frac{a}{2} - \cos\frac{a}{2}\right]^2 = 1 - \sin a.$$

Désignons par ε une quantité égale à $+1$ ou à -1, de même par ε' une quantité égale aussi à ± 1, les égalités précédentes donnent :

$$\sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2} = \varepsilon\sqrt{1 + \sin a},$$

$$\sin\frac{a}{2} - \cos\frac{a}{2} = \varepsilon'\sqrt{1 - \sin a}.$$

De ces deux relations on tire, alors,

$$(3)\quad \begin{cases} \sin\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\left[\varepsilon\sqrt{1+\sin a} + \varepsilon'\sqrt{1-\sin a}\right], \\ \cos\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\left[\varepsilon\sqrt{1+\sin a} - \varepsilon'\sqrt{1-\sin a}\right]. \end{cases}$$

Comme on peut prendre pour ε et ε', à volonté, $+1$ ou -1, l'on voit que $\sin\frac{a}{2}$ et $\cos\frac{a}{2}$ ont chacun *quatre* valeurs. Ces quatre valeurs se correspondent, car dès qu'on a choisi une combinaison de signes pour $\sin\frac{a}{2}$, celle qu'il faut prendre pour $\cos\frac{a}{2}$ est parfaitement déterminée. On peut remarquer que les quatre valeurs du sinus sont les mêmes que les quatre valeurs du cosinus, mais ce ne sont pas les valeurs égales qui se correspondent. Ainsi, si l'on prend :

$$\varepsilon = +1,\ \varepsilon' = -1,$$

on a :

$$\sin\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\sin a}-\sqrt{1-\sin a}\right],$$
$$\cos\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\sin a}+\sqrt{1-\sin a}\right].$$

En divisant les formules (3), membre à membre, on a $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$:

$$(4)\qquad \operatorname{tg}\frac{a}{2}=\frac{\varepsilon\sqrt{1+\sin a}+\varepsilon'\sqrt{1-\sin a}}{\varepsilon\sqrt{1+\sin a}-\varepsilon'\sqrt{1-\sin a}}.$$

Il semble, au premier abord, qu'il y a aussi quatre valeurs pour $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$, mais il est facile de se convaincre qu'il n'y en a en réalité que deux. Multiplions, en effet, les deux termes de la fraction (4) par ε et remarquons que

$$\varepsilon^2=(\pm 1)^2=+1,$$

nous aurons :

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{1+\sin a}+\varepsilon\varepsilon'\sqrt{1-\sin a}}{\sqrt{1+\sin a}-\varepsilon\varepsilon'\sqrt{1-\sin a}}.$$

On voit bien, ainsi, qu'il n'y a que deux valeurs, car $\varepsilon\varepsilon'$ est égal à $+1$ ou -1. Ces deux valeurs sont

$$\frac{\sqrt{1+\sin a}+\sqrt{1-\sin a}}{\sqrt{1+\sin a}-\sqrt{1-\sin a}}\quad\text{et}\quad\frac{\sqrt{1+\sin a}-\sqrt{1-\sin a}}{\sqrt{1+\sin a}+\sqrt{1-\sin a}};$$

elles sont inverses l'une de l'autre.

Les résultats précédents sont faciles à expliquer.

Ce qu'on connaît, en effet, ce n'est pas l'arc a, mais son sinus. Les formules (3) et (4) fournissent donc les lignes trigonométriques des moitiés de *tous* les arcs dont le sinus est égal à $\sin a$.

1° Soit α un arc dont le sinus est égal à $\sin a$. Tous les arcs a, qui admettent ce sinus, sont donnés par les formules [**24**]

$$a=2k\pi+\alpha,\quad a=(2k+1)\pi-\alpha.$$

Leurs moitiés sont donc données par :

$$\frac{a}{2}=k\pi+\frac{\alpha}{2},\quad \frac{a}{2}=k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}.$$

Si k est pair, on a :

$$\cos\left(k\pi + \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2}, \quad \cos\left(k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\frac{\alpha}{2},$$
$$\sin\left(k\pi + \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\frac{\alpha}{2}, \quad \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2},$$
$$\operatorname{tg}\left(k\pi + \frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \quad \operatorname{tg}\left(k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.$$

Si k est impair,

$$\cos\left(k\pi + \frac{\alpha}{2}\right) = -\cos\frac{\alpha}{2}, \quad \cos\left(k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = -\sin\frac{\alpha}{2},$$
$$\sin\left(k\pi + \frac{\alpha}{2}\right) = -\sin\frac{\alpha}{2}, \quad \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = -\cos\frac{\alpha}{2},$$
$$\operatorname{tg}\left(k\pi + \frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \quad \operatorname{tg}\left(k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.$$

On voit bien, sur ces égalités, que les divers arcs $\frac{\alpha}{2}$ ont quatre valeurs pour le sinus ou le cosinus qui sont :

$$\pm\cos\frac{\alpha}{2}, \pm\sin\frac{\alpha}{2}$$

et seulement deux valeurs pour la tangente, inverses l'une de l'autre,

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

2° Donnons encore une explication géométrique. Portons sur l'axe $y'y$ des sinus des arcs d'origine A (*fig.* 35) un segment $\overline{OQ}$ égal à $\sin a$. Tous les arcs d'origine A, qui ont $\overline{OQ}$ pour sinus, sont terminés en l'un des deux points M ou M′ situés sur la perpendiculaire en Q à $y'y$. Soit N le milieu de l'arc géométrique AM et N′ le milieu de l'arc AMM′ (*fig.* 35), tous les arcs terminés en M ou M′ ont des moitiés terminées, d'après une remarque faite plus haut, en l'un des quatre points N, N′, N_1 ou N_1' (N_1 et N_1' étant diamétralement opposés à N et N′). La figure $NN'N_1N_1'$ est un rectangle, mais dont les

côtés ne sont parallèles ni à $x'x$ ni à $y'y$; les projections des quatre sommets sur les deux axes sont donc quatre points distincts. Il y a quatre valeurs pour le sinus et quatre valeurs pour le cosinus. Il n'y a que deux valeurs pour la tangente, puisque les points sont, deux à deux, diamétralement opposés.

Il est facile de vérifier, sur la figure, l'identité des quatre valeurs du cosinus à celles du sinus; car l'arc géométrique AMM′ étant le

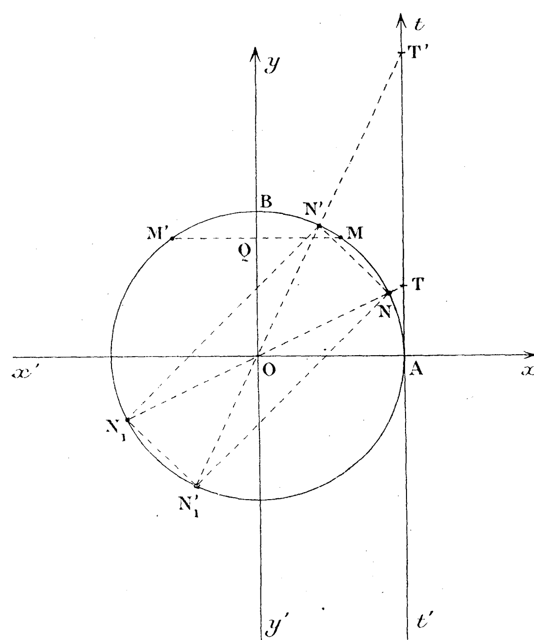


Fig. 35.

supplément de l'arc géométrique AM, l'arc géométrique AN′ est le complément de l'arc AN. Il en résulte que l'on a

$$\text{arc AN} = \text{arc BN}'$$

d'où résulte le fait énoncé.

Remarque. — Si, en même temps que le sinus, on se donne l'arc, l'indétermination des lignes de l'arc moitié disparaît. Il sera facile de reconnaître quelle est la combinaison des signes ε et ε' qu'il

faudra choisir. Soit, en effet, a l'arc *donné*, les formules (3) et (4) donnent les lignes des quatre arcs

$$\frac{a}{2}, \quad \frac{a}{2}+\frac{\pi}{2}, \quad \frac{a}{2}+\pi, \quad \frac{a}{2}+\frac{3\pi}{2}.$$

Pour savoir, par exemple, quelle valeur il faut prendre pour avoir $\sin\frac{a}{2}$, nous chercherons d'abord dans quel quadrant l'arc $\frac{a}{2}$ se termine, et ceci nous renseigne sur le signe de $\sin\frac{a}{2}$. Connaissant le signe, il ne nous reste plus à choisir qu'entre deux valeurs; car les formules (3) donnent deux valeurs positives et deux valeurs négatives. Nous chercherons, à cet effet, celui des trois arcs $\frac{a}{2}+\frac{\pi}{2}$, $\frac{a}{2}+\pi$ et $\frac{a}{2}+\frac{3\pi}{2}$ dont le sinus a le même signe que $\sin\frac{a}{2}$ et nous comparerons la grandeur relative de son sinus à celle de $\sin\frac{a}{2}$; nous saurons ainsi si $\sin\frac{a}{2}$ est la plus grande ou la plus petite des deux quantités à choisir, en valeur absolue. Pour comparer les grandeurs relatives des sinus des deux arcs, il suffit de les ramener au premier quadrant (n° 57) ; c'est, alors, le plus grand arc qui a le plus grand sinus.

Exemple. — *Calculer les lignes trigonométriques de l'arc* $\frac{\pi}{8}$ *sachant que*

$$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

L'arc $\frac{\pi}{8}$ appartenant au premier quadrant, son sinus est positif. L'arc $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}$ a aussi un sinus positif et, si on le réduit au premier quadrant on a $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$. Or, comme

$$\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8},$$

on en conclut que $\sin\frac{\pi}{8}$ est la plus petite des valeurs positives fournies par la relation (3).

Il faut donc prendre, puisque $\sin\frac{\pi}{8} > 0$, $\varepsilon = +1$, $\varepsilon' = -1$ et on a :

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} - \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}\right],$$

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}\right],$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2}}}.$$

Remarque. — Dans l'exemple du numéro précédent, nous avons, de même, calculé les lignes de l'arc $\frac{\pi}{8}$, en partant du cosinus. Les expressions que nous avons trouvées doivent être égales à celles-ci. En égalant les deux valeurs trouvés pour le sinus et le cosinus, par exemple, on arrive, ainsi, à l'égalité

$$\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2 \pm \sqrt{2}}\ (1).$$

88. Problème. — *Calculer tg* $\frac{a}{2}$ *connaissant tg* a.

La formule [**43**] donne :

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}.$$

Dans cette égalité, remplaçons a par $\frac{a}{2}$ et il vient :

$$\operatorname{tg} a = \frac{2 \operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{a}{2}},$$

(1) D'une manière générale, on a l'égalité

$$\sqrt{\frac{a+\sqrt{b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{b}}{2}} = \sqrt{a \pm \sqrt{a^2 - b}}.$$

Si on pose :

$$a = \text{A} \quad \text{et} \quad a^2 - b = \text{B},$$

et si b est un carré parfait C^2, on retrouve la formule de transformation de l'expression

$$\sqrt{\text{A} \pm \sqrt{\text{B}}}$$

établie dans mes *Leçons d'Algèbre*, nos 171-174.

qui donne $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ en fonction de $\operatorname{tg} a$. Chassons le dénominateur et ordonnons :

$$(1) \qquad \operatorname{tg} a \operatorname{tg}^2\frac{a}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{a}{2} - \operatorname{tg} a = 0.$$

On a là une équation du second degré en $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ qui a toujours deux racines dont l'une est l'inverse changé de signe de l'autre puisque le produit des racines est égal à -1. En résolvant, on a donc :

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}{\operatorname{tg} a}.$$

Il est aisé d'expliquer ces résultats.

On se donne $\operatorname{tg} a$ et on trouve les tangentes des moitiés de tous les arcs admettant cette tangente. Or, si α est l'un de ces arcs, tous les autres sont compris dans la formule [**25**] :

$$a = k\pi + \alpha.$$

Les moitiés de ces arcs sont donc données par la formule

$$\frac{a}{2} = k\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}.$$

Si k est pair, $k = 2k'$, on a :

$$\operatorname{tg}\left(k\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(k'\pi + \frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Si k est impair, $k = 2k' + 1$, on a :

$$\operatorname{tg}\left(k\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(k'\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = -\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.$$

Les arcs $\frac{a}{2}$ ont donc deux tangentes $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ et $-\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$ dont l'une est bien l'inverse changé de signe de l'autre, puisque

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

On pourrait aussi donner, comme plus haut, une interprétation géométrique. Nous laissons au lecteur le soin de le faire.

Remarque. — Il est clair que si, avec la tangente, on se donne l'arc, l'ambiguïté disparaît. On sait d'avance quel doit être le signe de la tangente; on sait donc d'avance quelle racine il faut choisir.

Exemple. — *Calculer* $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$, *sachant que*

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1.$$

L'angle $\frac{\pi}{8}$ étant plus petit qu'un quadrant, sa tangente est posititive on devra donc prendre la racine positive de l'équation (1) qui, dans le cas présent, est

$$\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8} + 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} - 1 = 0.$$

on a donc

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \frac{-1 + \sqrt{1+1}}{1} = \sqrt{2} - 1.$$

C'est la valeur que nous avions déjà trouvée au n° 86.

89. Théorème. — *Les lignes trigonométriques d'un arc peuvent s'exprimer* rationnellement *en fonction de la tangente de l'arc moitié.*

La proposition est évidente pour la tangente, car on a (n° 88) :

$$\text{[46]} \qquad \operatorname{tg} a = \frac{2\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}.$$

On a, d'autre part (n° 87 (1)),

$$\sin a = 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} = 2\frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}}\cos^2\frac{a}{2}.$$

Or, puisque, d'après les formules [**31**] et [**36**],

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}},$$

$$\cos^2\frac{a}{2} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{a}{2}},$$

l'égalité précédente s'écrit :

$$[47] \qquad \sin a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}.$$

Enfin, comme

$$\cos a = \frac{\sin a}{\operatorname{tg} a},$$

on a, en divisant, membre à membre, les formules [**46**] et [**47**],

$$[48] \qquad \cos a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}.$$

Les trois formules [**46**], [**47**] et [**48**] montrent bien que $\operatorname{tg} a$, $\cos a$ et $\sin a$ s'expriment *rationnellement* en fonction de $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$. Il en est, évidemment, de même pour leurs inverses $\operatorname{cotg} a$, $\operatorname{séc} a$, $\operatorname{coséc} a$.

90. Divisions par 4, 8, 16, etc. — Du moment que nous savons résoudre le problème de la division par 2, nous pouvons, en répétant cette division plusieurs fois de suite, résoudre la question dans les cas des divisions par 4, 8, etc. ; en général par 2^p..

En effet, supposons qu'on connaisse $\cos a$. On a, comme nous l'avons vu (n° 86),

$$\left\{ \begin{aligned} \cos \frac{a}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}, \\ \sin \frac{a}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}, \\ \operatorname{tg} \frac{a}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}. \end{aligned} \right.$$

Or, en changeant dans les formules a en $\frac{a}{2}$, il vient :

$$\left\{\begin{aligned} \cos\frac{a}{4} &= \pm\sqrt{\frac{1+\cos\frac{a}{2}}{2}}, \\ \sin\frac{a}{4} &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos\frac{a}{2}}{2}}, \\ \operatorname{tg}\frac{a}{4} &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos\frac{a}{2}}{1+\cos\frac{a}{2}}}. \end{aligned}\right.$$

Remplaçons, dans les seconds membres, $\cos\frac{a}{2}$ par sa valeur ci-dessus et nous avons, en posant $\varepsilon = \pm 1$,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\frac{a}{4} &= \pm\sqrt{\frac{1+\varepsilon\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}}{2}}, \\ \sin\frac{a}{4} &= \pm\sqrt{\frac{1-\varepsilon\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}}{2}}, \\ \operatorname{tg}\frac{a}{4} &= \pm\sqrt{\frac{1-\varepsilon\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}}{1+\varepsilon\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}}}. \end{aligned}\right.$$

Le problème de la division par 4, lorsqu'on se donne $\cos a$ est donc résolu. On traiterait de même la question lorsqu'on se donne $\sin a$ ou $\operatorname{tg} a$.

En changeant, ensuite, dans les formules (1), a en $\frac{a}{2}$ puis, en remplaçant, dans les seconds membres, $\cos\frac{a}{2}$ par sa valeur, on aurait les lignes de l'arc $\frac{a}{8}$, connaissant $\cos a$; et ainsi de suite.

On peut remarquer qu'on peut avoir, pour un même cas, des formules différentes d'aspect, suivant qu'on prend les formules du n° 86 ou du n° 87 comme point de départ, mais les diverses formes ainsi obtenues doivent être équivalentes. On pourra, comme exercice, le vérifier.

EXERCICES

24. Vérifier les égalités suivantes :

$$\operatorname{tg} 2a - \operatorname{tg} a = \frac{2 \sin a}{\cos a + \cos 3a},$$

$$\operatorname{tg}^2 2a - \operatorname{tg}^2 a = \frac{\sin 3a \sin a}{\cos^2 2a \cos^2 a},$$

$$\sin 5a \sin a = \sin^2 3a - \sin^2 2a,$$
$$\sin 7a \sin 3a = \sin^2 5a - \sin^2 2a,$$

$$\operatorname{tg} 3a \operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg}^2 2a - \operatorname{tg}^2 a}{1 - \operatorname{tg}^2 2a \operatorname{tg}^2 a} = \frac{\cos 2a - \cos 4a}{\cos 2a + \cos 4a},$$

$$\operatorname{tg} 2a + \operatorname{séc} 2a = \frac{\cos a + \sin a}{\cos a - \sin a},$$

$$\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{cotg}^2 a = 2\,\frac{3 + \cos 4a}{1 - \cos 4a},$$

$$\frac{\sin 2a}{1 + \cos 2a} \times \frac{\cos a}{1 + \cos a} = \operatorname{tg} \frac{a}{2},$$

$$\sin a = \frac{2}{\operatorname{cotg} \frac{a}{2} + \operatorname{tg} \frac{a}{2}},$$

$$\left(\operatorname{cotg} \frac{a}{2} - \operatorname{tg} \frac{a}{2}\right)^2 (1 - 2 \operatorname{tg} a \operatorname{cotg} 2a) = 4,$$

$$\left(1 + \operatorname{tg} \frac{a}{2} + \operatorname{séc} \frac{a}{2}\right)\left(1 + \operatorname{tg} \frac{a}{2} - \operatorname{séc} \frac{a}{2}\right) = \sin a \operatorname{séc}^2 \frac{a}{2},$$

$$\sin 3a = 4 \sin a \sin\left(\frac{\pi}{3} + a\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - a\right),$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) + \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \operatorname{séc} 2a,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}.$$

25. A, B, C étant les angles d'un triangle, vérifier les égalités suivantes :

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C,$$
$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 4 \cos A \cos B \cos C + 1 = 0,$$
$$\cos 4A + \cos 4B + \cos 4C + 1 = 4 \cos 2A \cos 2B \cos 2C.$$

26. Démontrer que l'on a :

$$4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4},$$

$$2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{3} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4},$$

les arcs étant compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

27. Sachant que

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

calculer les lignes des angles de 15° et de 7° 30′.

28. Les angles θ et u vérifiant l'égalité

$$(1 + e \cos \theta)(1 - e \cos u) = 1 - e^2,$$

montrer que l'on a aussi

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1+e}{1-e} \operatorname{tg}^2 \frac{u}{2}.$$

CHAPITRE VIII

TRANSFORMATION DES SOMMES EN PRODUITS

91. Transformation d'un produit de sinus et de cosinus en une somme. — Écrivons les égalités [**38**], [**39**], [**38**]*bis* et [**39**]*bis* qui donnent les cosinus et les sinus des arcs $a + b$ et $a - b$:

[**39**] $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a,$
[**39**]*bis* $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a,$
[**38**] $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$
[**38**]*bis* $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$

Ajoutons et retranchons les égalités [**39**] et [**39**]*bis*, il vient :

(1) $\sin(a + b) + \sin(a - b) = 2 \sin a \cos b,$
(2) $\sin(a + b) - \sin(a - b) = 2 \sin b \cos a.$

De même, ajoutons et retranchons les égalités [**38**] et [**38**]*bis*, nous avons :

(3) $\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos a \cos b,$
(4) $\cos(a - b) - \cos(a + b) = 2 \sin a \sin b.$

Des quatre relations (1), (2), (3) et (4) on tire, alors, les suivantes qui transforment des produits en sommes :

$$[49]\quad \begin{cases} \sin a \cos b = \dfrac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)], \\ \sin b \cos a = \dfrac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)], \\ \cos a \cos b = \dfrac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)], \\ \sin a \sin b = \dfrac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]. \end{cases}$$

Remarque. — Pour retenir ces formules, il est bon de porter son attention sur ce fait que, dans la formule qui donne $\sin a \sin b$, c'est $\cos(a+b)$ qu'on *retranche*.

92. Transformation d'une somme de sinus et de cosinus en un produit. — Les formules (1), (2), (3) et (4) du numéro précédent résolvent immédiatement la question. Nous les écrirons sous une forme plus commode.

Posons :

$$a + b = p, \qquad a - b = q.$$

On aura :

$$a = \frac{p+q}{2}, \qquad b = \frac{p-q}{2}.$$

Portons ces valeurs dans les égalités (1), (2), (3) et (4) du n° 91 et nous avons :

$$[50]\quad \begin{cases} \sin p + \sin q = 2 \sin \dfrac{p+q}{2} \cos \dfrac{p-q}{2}, \\ \sin p - \sin q = 2 \sin \dfrac{p-q}{2} \cos \dfrac{p+q}{2}, \\ \cos p + \cos q = 2 \cos \dfrac{p+q}{2} \cos \dfrac{p-q}{2}, \\ \cos q - \cos p = 2 \sin \dfrac{p+q}{2} \sin \dfrac{p-q}{2}. \end{cases}$$

Il est bon, ici aussi, de porter son attention sur le fait que, dans la dernière formule, c'est l'arc q qui est le premier.

Remarque I. — Les formules [**50**] ne donnent le moyen de transformer en produits que des sommes ou différences de deux sinus

ou de deux cosinus. Si l'on avait la somme ou la différence d'un sinus et d'un cosinus, on ramènerait ce cas à l'un des précédents en changeant l'un des arcs en son complément. Ainsi :

$$\sin p + \cos q = \sin p + \sin\left(\frac{\pi}{2} - q\right);$$

donc :

$$\sin p + \cos q = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p+q}{2}\right).$$

Remarque II. — Les égalités [**44**] et [**45**], sur lesquelles nous avons attiré l'attention au n° 86, ne sont que des cas particuliers des deux dernières formules [**50**]. On a, en effet :

$$1 + \cos a = \cos 0 + \cos a,$$
$$1 - \cos a = \cos 0 - \cos a.$$

En appliquant les formules [**50**] où l'on fait

$$q = 0, \qquad p = a,$$

on a donc :

$$[44] \qquad 1 + \cos a = 2\cos^2\frac{a}{2},$$

$$[45] \qquad 1 - \cos a = 2\sin^2\frac{a}{2}.$$

93. Application I. — *Transformer l'expression*

$$\frac{\sin p - \sin q}{\sin p + \sin q}.$$

On a, en vertu des égalités [**50**],

$$\frac{\sin p - \sin q}{\sin p + \sin q} = \frac{2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}}{2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}} = \frac{\dfrac{\sin\frac{p-q}{2}}{\cos\frac{p-q}{2}}}{\dfrac{\sin\frac{p+q}{2}}{\cos\frac{p+q}{2}}}.$$

Ceci s'écrit :

$$[51] \qquad \frac{\sin p - \sin q}{\sin p + \sin q} = \frac{\operatorname{tg}\frac{p-q}{2}}{\operatorname{tg}\frac{p+q}{2}},$$

qui est une formule d'un usage fréquent.

94. Application II. — *Transformer la somme*

$$\sin A + \sin B + \sin C - \sin(A + B + C)$$

en un produit.

On a :

$$\sin A - \sin(A + B + C) = -2\sin\frac{B+C}{2}\cos\left(A + \frac{B+C}{2}\right),$$

$$\sin B + \sin C = 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}.$$

En ajoutant, on a donc :

$$\sin A + \sin B + \sin C - \sin(A + B + C)$$
$$= 2\sin\frac{B+C}{2}\left[\cos\frac{B-C}{2} - \cos\left(A + \frac{B+C}{2}\right)\right].$$

Or, d'après [**50**],

$$\cos\frac{B-C}{2} - \cos\left(A + \frac{B+C}{2}\right) = 2\sin\frac{C+A}{2}\sin\frac{A+B}{2};$$

on a donc, finalement,

$$(1) \qquad \sin A + \sin B + \sin C - \sin(A + B + C)$$
$$= 4\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}\sin\frac{A+B}{2}.$$

Remarque. — En remplaçant, dans la formule (1), A, B, C, respectivement, par $90° - A$, $90° - B$, $90° - C$, on a la nouvelle formule :

$$(2) \qquad \cos A + \cos B + \cos C + \cos(A + B + C)$$
$$= 4\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2}\cos\frac{A+B}{2}.$$

CAS PARTICULIER. — Dans le cas particulier où les angles A, B, C sont les trois angles d'un triangle, on a :

$$A + B + C = 180^\circ,$$
$$\frac{B + C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2},$$
$$\frac{C + A}{2} = 90^\circ - \frac{B}{2},$$
$$\frac{A + B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2};$$

et les formules (1) et (2) deviennent :

$$(3) \qquad \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2},$$

$$(4) \qquad \cos A + \cos B + \cos C - 1 = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

95. Application III (1). — *Somme des cosinus ou des sinus d'arcs en progression arithmétique.*

Soit :

$$S = \cos a + \cos(a + r) + \cos(a + 2r) + \ldots + \cos[a + (n - 1) r]$$

la somme des cosinus de m arcs en progression arithmétique (2), a étant le premier terme et r la raison.

Considérons les produits des divers termes de cette somme par $2 \sin \frac{r}{2}$ et transformons ces produits en différences. On aura, en appliquant les formules [**49**],

$$2 \cos a \sin \frac{r}{2} = \sin\left(a + \frac{r}{2}\right) - \sin\left(a - \frac{r}{2}\right),$$
$$2 \cos(a + r) \sin \frac{r}{2} = \sin\left(a + \frac{3r}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{r}{2}\right),$$
$$2 \cos(a + 2r) \sin \frac{r}{2} = \sin\left(a + \frac{5r}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{3r}{2}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$2 \cos\left[a + (n - 1) r\right] \sin \frac{r}{2} = \sin\left[a + (2n - 1)\frac{r}{2}\right] - \sin\left[a + (2n - 3)\frac{r}{2}\right].$$

(1) Le lecteur pourra, dans une première lecture, passer ce paragraphe.
(2) Voir, au sujet des progressions arithmétiques, les nos 129 et 130 de mes *Leçons d'Algèbre*.

Ajoutons toutes ces égalités, membres à membres. Dans le premier membre, nous pouvons mettre $2 \sin \frac{r}{2}$ en facteur. Dans le second membre, tous les termes se détruisent deux à deux sauf le dernier terme de la première égalité et le premier terme de la dernière égalité. Il vient donc :

$$2\,\mathrm{S} \sin \frac{r}{2} = \sin \left[a + (2n-1)\frac{r}{2}\right] - \sin\left(a - \frac{r}{2}\right).$$

Remplaçons le second membre par un produit :

$$2\,\mathrm{S} \sin \frac{r}{2} = 2 \sin \frac{nr}{2} \cos \left[a + (n-1)\frac{r}{2}\right]$$

et l'on a, enfin,

$$(1) \qquad \mathrm{S} = \frac{\sin \frac{nr}{2} \cos \left[a + (n-1)\frac{r}{2}\right]}{\sin \frac{r}{2}}.$$

Posons, de même,

$$\mathrm{S}' = \sin a + \sin(a+r) + \sin(a+2r) + \ldots + \sin[a + (n-1)r].$$

On peut calculer S′ de la même façon que nous avons calculé S en considérant le produit $2\,\mathrm{S}' \sin \frac{r}{2}$ et faisant les mêmes transformations; mais il est facile de déduire directement la valeur de S′ de celle de S. Remplaçons, en effet, dans l'expression de S, a par $\frac{\pi}{2} + a$. Si l'on se rappelle (n° 35) que

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x,$$

on voit que cette transformation change S en $-$S′. Effectuons-la sur les deux membres de l'égalité (1) et il vient :

$$-\mathrm{S}' = \frac{\sin \frac{nr}{2} \cos \left[\frac{\pi}{2} + a + (n-1)\frac{r}{2}\right]}{\sin \frac{r}{2}} = -\frac{\sin \frac{nr}{2} \sin \left[a + (n-1)\frac{r}{2}\right]}{\sin \frac{r}{2}}$$

d'où

$$(2) \qquad \mathrm{S}' = \frac{\sin \frac{nr}{2} \sin \left[a + (n-1)\frac{r}{2}\right]}{\sin \frac{r}{2}}.$$

96. Transformation d'une somme de tangentes. — On a :

$$\operatorname{tg} p \pm \operatorname{tg} q = \frac{\sin p}{\cos p} \pm \frac{\sin q}{\cos q} = \frac{\sin p \cos q \pm \sin q \cos p}{\cos p \cos q}.$$

Le numérateur du dernier membre est $\sin(p \pm q)$ et on a, par suite,

[52] $$\operatorname{tg} p \pm \operatorname{tg} q = \frac{\sin(p \pm q)}{\cos p \cos q}.$$

De même,

$$\operatorname{cotg} p \pm \operatorname{cotg} q = \frac{\cos p}{\sin p} \pm \frac{\cos q}{\sin q} = \frac{\sin q \cos p \pm \sin p \cos q}{\sin p \sin q}.$$

Le numérateur du dernier membre est $\sin(q \pm p)$; on a donc

[53] $$\operatorname{cotg} p \pm \operatorname{cotg} q = \frac{\sin(q \pm p)}{\sin p \sin q}.$$

La formule [53] se déduirait, d'ailleurs, facilement de la formule [52] en remplaçant, dans cette dernière, p et q, respectivement, par

$$\frac{\pi}{2} - p \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2} - q.$$

Remarque. — Des deux formules [52] séparées on conclut, en les divisant membre à membre,

$$\frac{\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q}{\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q} = \frac{\sin(p - q)}{\sin(p + q)}.$$

Les formules [53] donnent, de même,

$$\frac{\operatorname{cotg} p - \operatorname{cotg} q}{\operatorname{cotg} p + \operatorname{cotg} q} = \frac{\sin(q - p)}{\sin(q + p)}.$$

97. Application. — *Transformer les expressions*

$$1 \pm \operatorname{tg} a \quad \textit{et} \quad \frac{1 - \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg} a}.$$

Remarquons que (nº 72)

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1.$$

On a donc

$$1 \pm \operatorname{tg} a = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \pm \operatorname{tg} a;$$

et, par suite,

$$(1) \qquad 1 \pm \operatorname{tg} a = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} \pm a\right)}{\cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos a} = \frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} \pm a\right)}{\cos a}$$

On déduit de là,

$$(2) \qquad \frac{1 - \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg} a} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + a\right)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - a\right),$$

car, les arcs $\frac{\pi}{4} - a$ et $\frac{\pi}{4} + a$ étant complémentaires,

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + a\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right).$$

Remarque. — Si A est un arc exprimé en *degrés*, on a :

$$(3) \qquad 1 \pm \operatorname{tg} A = \frac{\sqrt{2}\sin(45^\circ \pm A)}{\cos A},$$

$$(4) \qquad \frac{1 - \operatorname{tg} A}{1 + \operatorname{tg} A} = \frac{\sin(45^\circ - A)}{\sin(45^\circ + A)} = \operatorname{tg}(45^\circ - A).$$

EXERCICES

29. Transformer en produits les expressions :

$$\sin a + \sin 3a + \sin 9a - \sin 5a,$$
$$\operatorname{tg}(a + b + c) - [\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c],$$
$$-1 + \cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu,$$
$$1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu,$$
$$\operatorname{tg}(a - b) + \operatorname{tg}(b - c) + \operatorname{tg}(c - a).$$

30. Démontrer l'égalité :

$$4\cos a\cos b = \cos(a + b) + \cos(a - b) + \cos(-a + b) + \cos(-a - b);$$

plus généralement :

$$2^n\cos a\cos b\cos c \dots \cos l = \Sigma\cos(\pm a \pm b \pm c \dots \pm l)$$

n étant le nombre des arcs $a, b, c, \dots l$.

31. Démontrer que si l'on a :

$$\sin x + \sin y = \sin x \sin y,$$

On a aussi :

$$\left[\cos \frac{x-y}{2} - \sin \frac{x+y}{2}\right]^2 = 1.$$

32. Prouver que l'on a, quel que soit x,

$$\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0,$$

$$\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0;$$

plus généralement, que l'on a :

$$\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{n}\right) + \ldots \sin\left(x + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = 0,$$

$$\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{n}\right) + \ldots + \cos\left(x + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = 0,$$

n étant un entier quelconque.

33. Calculer la somme des carrés des sinus d'arcs en progression arithmétique. Même question pour les cosinus.

34. Démontrer les propositions suivantes :

Théorème. — *Le produit des sinus de deux arcs positifs, dont la somme est constante et au plus égale à π, augmente lorsque la valeur absolue de la différence de ces deux arcs diminue.*

Corollaire. — *Le produit précédent est maximum lorsque les deux arcs sont égaux, s'ils peuvent le devenir.*

Généralisation. — *Le produit des sinus d'un nombre quelconque d'arcs positifs, dont la somme est au plus égale à π, est inférieur ou au plus égal au produit obtenu en remplaçant chacun de ces arcs par leur moyenne arithmétique.*

Ainsi, x_1, x_2, ... x_n étant n arcs positifs tels que

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant \pi,$$

on a :

$$\sin x_1 \cdot \sin x_2 \ldots \sin x_n \leqslant \left[\sin\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)\right]^n.$$

Corollaire. — *Le produit des sinus d'un nombre quelconque d'arcs positifs, dont la somme est constante et au plus égale à π, est maximum lorsque tous les arcs sont égaux s'ils peuvent le devenir.*

— *Les propositions précédentes s'appliquent encore aux cosinus pourvu que chacun des arcs positifs donnés soit plus petit que $\frac{\pi}{2}$, leur somme étant plus petite que π.*

— *Elles s'appliquent, également, aux tangentes pourvu que la somme des arcs positifs considérés soit plus petite que* $\frac{\pi}{2}$.

On se servira, pour faire les démonstrations précédentes, des égalités

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right],$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right],$$

$$\operatorname{tg} x \,.\, \operatorname{tg} y = 1 - \frac{2\cos(x+y)}{\cos(x-y)+\cos(x+y)},$$

et on raisonnera comme en algèbre. [Voir, dans mes *Leçons d'Algèbre élémentaire* le chapitre v du livre IV.]

— *Les réciproques des propositions précédentes sont vraies.*

Les démonstrations se font encore comme en algèbre. [N° 127, th. II, de mes *Leçons d'Algèbre*.]

LIVRE II

TABLES. — ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

CHAPITRE PREMIER

VALEURS APPROCHÉES DES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES

98. Théorème. — x *étant la mesure d'un arc positif, plus petit qu'un quadrant et mesuré avec le rayon du cercle pris pour unité, on a la double inégalité :*

[**54**] $$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Soit, en effet, $\overset{\frown}{\mathrm{AM}}$ (*fig.* 36) cet arc x. Comme il est positif et plus petit que $\frac{\pi}{2}$, $\sin x$ et $\operatorname{tg} x$ sont positifs et on a :

$$\sin x = \mathrm{MP},$$
$$\operatorname{tg} x = \mathrm{AT},$$

les *longueurs* MP et AT étant mesurées avec le rayon OA pris pour unité.

Ceci posé, si on compare les aires des deux triangles OMA, OAT et du secteur OAM, on a évidemment :

$$\textit{aire tr. } \mathrm{OMA} < \textit{aire sect. } \mathrm{OAM} < \textit{aire tr. } \mathrm{OAT}.$$

Remplaçons les aires par leurs expressions ; il vient :

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{OA} \times \mathrm{MP} < \frac{1}{2}\,\mathrm{OA} \times \textit{arc}\ \mathrm{AM} < \frac{1}{2}\,\mathrm{OA} \times \mathrm{AT}.$$

Ceci donne, en divisant les trois membres par $\frac{OA}{2}$,

$$MP < \text{arc } AM < AT,$$

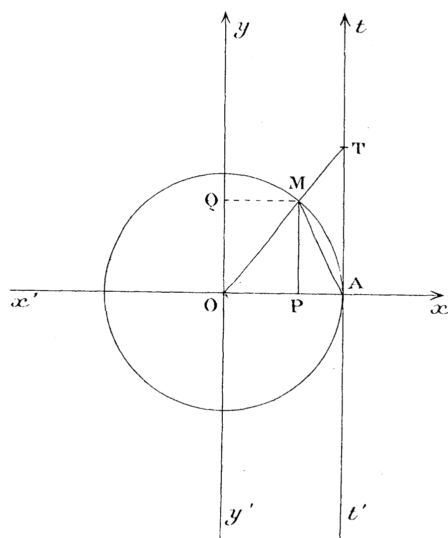


Fig. 36.

c'est-à-dire

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x;$$

ce qu'il fallait démontrer.

99. Théorème. — *Le rapport d'un arc (mesuré avec le rayon pris pour unité) à son sinus tend vers l'unité lorsque cet arc tend vers zéro.*

1° Supposons d'abord cet arc x positif. Puisque nous le faisons tendre vers zéro, nous pouvons toujours supposer qu'il est plus petit que $\frac{\pi}{2}$ et, alors, on a, d'après le théorème qui précède [**54**],

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Divisons les trois membres par $\sin x$, ce qui ne change rien, puisque $\sin x$ est positif, il vient :

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Lorsque x tend vers zéro, par valeurs positives, $\cos x$ tend, comme nous l'avons vu (*voir le tableau de variation au* n° 26), vers 1. Le rapport $\frac{x}{\sin x}$ qui est donc compris entre 1 et une quantité qui tend vers 1 tend lui-même vers 1, lorsque x tend vers zéro par valeurs positives.

2° Supposons, en second lieu, x négatif. Posons alors,

$$x = -x';$$

x' sera un nombre positif. On aura :

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{-x'}{\sin(-x')} = \frac{x'}{\sin x'}.$$

Or, lorsque x tend vers zéro par valeurs négatives, x' tend vers zéro par valeurs positives; le rapport $\frac{x'}{\sin x'}$ a donc pour limite 1, d'après la première partie de cette démonstration. Le rapport $\frac{x}{\sin x}$, qui est constamment égal à $\frac{x'}{\sin x'}$, a donc aussi pour limite 1.

On a donc, dans tous les cas,

$$lim\left(\frac{x}{\sin x}\right) = 1, \text{ pour } x = 0.$$

100. Théorème. — *Le sinus d'un arc est supérieur à l'excès de cet arc sur le quart du cube de cet arc. L'arc étant toujours positif, plus petit qu'un quadrant, et mesuré avec le rayon pris pour unité.*

On a, en effet, d'après la formule de duplication [**51**],

$$\sin x = 2 \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\,\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2}.$$

Ceci s'écrit :

$$(1) \qquad \sin x = 2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\left(1 - \sin^2\frac{x}{2}\right).$$

Ceci posé, l'arc x étant positif et plus petit qu'un quadrant, on a, d'après le théorème du n° 98,

$$\text{tg}\,\frac{x}{2} > \frac{x}{2}, \tag{2}$$

et

$$\sin\frac{x}{2} < \frac{x}{2}.$$

De cette dernière inégalité, on conclut :

$$1 - \sin^2\frac{x}{2} > 1 - \frac{x^2}{4}. \tag{3}$$

Multipliant, membre à membre, les inégalités (2) et (3), ce qui est permis puisque tous les membres sont positifs, et tenant compte de (1), il vient :

$$\sin x > 2\,\frac{x}{2}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right),$$

ou

$$\sin x > x - \frac{x^3}{4}.$$

Corollaire. — *L'erreur que l'on commet en prenant comme valeur approchée du sinus d'un arc positif plus petit qu'un quadrant, la mesure de cet arc (mesuré avec le rayon pris pour unité) est plus petite que le quart du cube de cet arc.*

Car, d'après le théorème précédent et celui du n° 98, on a :

$$x > \sin x > x - \frac{x^3}{4}.$$

On en conclut :

$$0 < x - \sin x < \frac{x^3}{4}.$$

x est donc une valeur approchée de $\sin x$ *par excès* avec une erreur moindre que $\frac{x^3}{4}$.

101 (1). **Remarque.** — On peut aller plus loin et montrer que l'erreur commise est plus petite que le *sixième* du cube de l'arc.

(1) On pourra passer ce paragraphe dans une première lecture.
Cette démonstration a été donnée par *Ranson*, en 1866, dans le tome III du *Messenger of Mathematics*.

Je dis que : *x étant un arc positif plus petit que $\frac{\pi}{2}$, on a :*

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6}.$$

Écrivons la formule (5) du n° 84 qui donne $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$:

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x.$$

Dans cette égalité, remplaçons x, successivement, par $\frac{x}{3}$, $\frac{x}{3^2}$, $\frac{x}{3^3}$, etc. .. jusqu'à $\frac{x}{3^n}$; nous aurons les égalités suivantes :

$$\sin x = 3 \sin \frac{x}{3} - 4 \sin^3 \frac{x}{3},$$

$$\sin \frac{x}{3} = 3 \sin \frac{x}{3^2} - 4 \sin^3 \frac{x}{3^2},$$

$$\sin \frac{x}{3^2} = 3 \sin \frac{x}{3^3} - 4 \sin^3 \frac{x}{3^3},$$

. . . .

$$\sin \frac{x}{3^{n-1}} = 3 \sin \frac{x}{3^n} - 4 \sin^3 \frac{x}{3^n}.$$

Multiplions la seconde de ces égalités par 3, la troisième par 3^2, etc. ; la dernière par 3^{n-1} et ajoutons les égalités, ainsi multipliées, membres à membres. Il y aura des simplifications évidentes : les termes $3 \sin \frac{x}{3}$, $3^2 \sin \frac{x}{3^2}$, ... $3^{n-1} \sin \frac{x}{3^{n-1}}$ figureront des deux côtés et disparaîtront. On aura donc :

$$\sin x = 3^n \sin \frac{x}{3^n} - 4 \left[\sin^3 \frac{x}{3} + 3 \sin^3 \frac{x}{3^2} + 3^2 \sin^3 \frac{x}{3^3} + \ldots + 3^{n-1} \sin^3 \frac{x}{3^n}\right].$$

Remplaçons, dans le crochet, chacun des sinus par l'arc correspondant; nous augmentons ainsi le crochet et nous diminuons, par suite, le second membre. On a donc

$$\sin x \geqslant 3^n \sin \frac{x}{3^n} - 4 \left[\frac{x^3}{3^3} + \frac{x^3}{3^5} + \frac{x^3}{3^7} \ldots + \frac{x^3}{3^{2n+1}}\right];$$

ce qui s'écrit :

$$(1) \qquad \sin x \geqslant \frac{\sin \frac{x}{3^n}}{\frac{x}{3^n}} \cdot x - 4 \frac{x^3}{3^3} \left[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \ldots + \frac{1}{3^{2n-2}}\right].$$

Ceci posé, cette inégalité (1) a lieu quel que soit le nombre entier n; elle aura donc encore lieu à la limite lorsque n croît indéfiniment. Or, lorsque n croît indéfiniment, $\frac{x}{3^n}$ tend vers zéro; le rapport

$$\frac{\sin \frac{x}{3^n}}{\frac{x}{3^n}}$$

a donc pour limite 1, d'après le théorème du n° 99. D'autre part, la quantité entre crochets est une progression géométrique décroissante dont le premier terme est 1 et la raison $\frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$. Lorsque n croît indéfiniment, cette somme a, comme on sait [1], une limite qui est le quotient du premier terme par l'excès de l'unité sur la raison :

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{9}{8}.$$

L'inégalité (1) devient donc, à la limite,

$$\sin x > x - 4\frac{x^3}{27} \times \frac{9}{8}$$

ou, enfin,

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6}.$$

102. Théorème. — x *étant un arc positif plus petit qu'un quadrant (mesuré avec le rayon pris pour unité), on a :*

$$1 - x^2 < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}.$$

On a, en effet, d'après la formule de duplication (n° 83),

$$\cos x = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}.$$

Remplaçons, dans le second membre, $\sin \frac{x}{2}$ par la valeur plus

(1) Voir dans mes *Leçons d'Algèbre*, n° 133, théorème III.

grande $\frac{x}{2}$, on aura :

$$\cos x > 1 - 2\frac{x^2}{4}$$

(1) $$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Remplaçons, de même, $\sin\frac{x}{2}$ par la valeur plus petite $\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^3$ et nous aurons :

$$\cos x < 1 - 2\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{32}\right)^2$$

d'où

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16} - \frac{x^6}{16 \times 32}.$$

Si, dans le second membre de cette dernière égalité, on supprime le terme $\frac{x^6}{16 \times 32}$, on la renforce et on a, par suite,

(2) $$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}.$$

Les relations (1) et (2) établissent la proposition.

Remarque. — Si on se sert de l'inégalité plus approchée du n° 101, on a :

$$\sin\frac{x}{2} > \frac{x}{2} - \frac{x^3}{48}$$

et, par suite,

$$\cos x < 1 - 2\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{48}\right)^2$$

ou

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{2x^6}{(48)^2}.$$

Donc, *a fortiori*,

(3) $$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Cette relation (3) est plus approchée que la relation (2). On peut donc dire que, pour un arc x compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on a :

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Corollaire. — x *étant un arc compris entre* 0 *et* $\frac{\pi}{2}$, *l'erreur qu'on commet, en prenant* $1 - \frac{x^2}{2}$ *comme valeur approchée de* cos x, *est plus petite que* $\frac{x^4}{16}$.

Car le théorème précédent donne :

$$0 < \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) < \frac{x^4}{16}.$$

— En prenant la formule (3), on aurait :

$$0 < \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) < \frac{x^4}{24}.$$

103. Calcul approché de cos 10″ **et** sin 10″. — Nous allons appliquer les deux corollaires précédents (nos 100 et 102) au calcul approché de cos 10″ et sin 10″. Nous avons vu (no 11, Ex. II) que la longueur de l'arc de 10 secondes est, en prenant le rayon pour unité,

$$\text{arc } 10'' = 0{,}0000484813681.$$

On a donc

$$\text{arc } 10'' < \frac{1}{2 \times 10^4}.$$

On en conclut, en appliquant le corollaire du no 100, que l'erreur que l'on commet en prenant la valeur de arc 10″ pour sin 10″ est plus petite que

$$\frac{(\text{arc } 10'')^3}{4} < \frac{1}{4} \times \frac{1}{8 \times 10^{12}} < \frac{1}{10^{13}}.$$

On peut donc affirmer qu'en prenant les treize premiers chiffres décimaux de arc 10″ on aura une valeur approchée, *par excès*, du sinus à une unité du dernier ordre décimal près.

On a donc, pour les treize premières décimales de sin 10″,

$$\sin 10'' = 0{,}0000484813680,$$

en prenant la valeur approchée par défaut.

De même, d'après le corollaire du n° 102, la quantité

$$1 - \frac{1}{2}(\text{arc } 10'')^2$$

est une valeur approchée, par défaut, de cos 10″ et l'erreur commise est plus petite que

$$\frac{1}{16}(\text{arc } 10'')^4 < \frac{1}{16} \times \frac{1}{16 \times 10^{16}} < \frac{1}{10^{18}}.$$

Les 18 premières décimales de cette quantité sont donc aussi celles de cos 10″. En effectuant le calcul, on trouve

$$\cos 10'' = 0{,}999999998824778473,$$

avec 18 décimales exactes.

EXERCICES

35. x étant un arc compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ prouver que l'on a :

$$\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3},$$
$$x < \frac{1}{3}\operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\sin x.$$

36. Trouver les limites des expressions suivantes :

$$\frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} \quad \text{lorsque } x \text{ tend vers } 0,$$
$$\frac{\sin mx}{\sin px}, \quad \text{»} \quad x \quad \text{»} \quad \text{»} \quad 0,$$
$$\frac{\sin mx}{\operatorname{tg} px}, \quad \text{»} \quad x \quad \text{»} \quad \text{»} \quad 0,$$
$$\frac{\sin x - \sin a}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}, \quad \text{»} \quad x \quad \text{»} \quad \text{»} \quad a,$$
$$\frac{\cos 2x}{1 - \sqrt{2}\sin x}, \quad \text{»} \quad x \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \frac{\pi}{4}.$$

CHAPITRE II

CONSTRUCTION D'UNE TABLE

104. Formules de Thomas Simpson. — Les formules de Thomas Simpson sont des formules qui permettent, connaissant cos $10''$ et sin $10''$, de calculer, de proche en proche, les cosinus et sinus des arcs de $10''$ en $10''$: $10''$, $20''$, $30''$, etc. Voici comment on les établit :

Écrivons les formules (1) et (3) du n° 91 :

$$\sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin a\cos b,$$
$$\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos a\cos b;$$

et, dans ces formules, faisons

$$b=10'' \quad a=m.\,10'',$$

m désignant un entier positif. Elles deviennent :

$$(1)\quad \sin(m+1)\,10''+\sin(m-1)\,10''=2\sin m\,10''.\cos 10'',$$
$$(2)\quad \cos(m+1)\,10''+\cos(m-1)\,10''=2\cos m\,10''.\cos 10''.$$

Remarquons que la quantité $2\cos 10''$ est très voisine de 2. Posons alors,

$$2\cos 10''=2-k;$$

k sera une quantité très petite.

D'ailleurs, puisqu'on prend comme valeur approchée de cos $10''$ la quantité

$$1-\frac{1}{2}\left(\text{arc }10''\right)^2,$$

on aura :

$$2-k=2-(\text{arc }10'')^2$$

c'est-à-dire

$$k=(\text{arc }10'')^2=0{,}00000\,00023\,50443\,053 \ (\textit{par défaut}).$$

En remplaçant, dans (1) et (2), $2\cos 10''$ par $2-k$, on a :

$$\sin(m+1)\,10''+\sin(m-1)\,10''=2\sin m\,10''-k\sin m10'',$$
$$\cos(m+1)\,10''+\cos(m-1)\,10''=2\cos m\,10''-k\cos m10''.$$

De ces deux dernières formules on déduit, enfin, les suivantes :

$$\sin(m+1)10'' - \sin m\,10'' = \sin m\,10'' - \sin(m-1)\,10'' - k\sin m\,10'',$$
$$\cos(m+1)10'' - \cos m\,10'' = \cos m\,10'' - \cos(m-1)\,10'' - k\cos m\,10'',$$

qui sont les formules dites « de Thomas Simpson ».

Faisons, d'abord, dans ces formules, $m = 1$ et nous avons :

$$\begin{cases} \sin 20'' - \sin 10'' = \sin 10'' - k\sin 10'', \\ \cos 20'' - \cos 10'' = \cos 10'' - 1 - k\cos 10'', \end{cases}$$

qui donnent $\sin 20''$ et $\cos 20''$ connaissant $\cos 10''$ et $\sin 10''$ que nous avons calculés plus haut (n° 103).

Faisant, ensuite, $m = 2$, nous obtenons :

$$\begin{cases} \sin 30'' - \sin 20'' = (\sin 20'' - \sin 10'') - k\sin 20'', \\ \cos 30'' - \cos 20'' = (\cos 20'' - \cos 10'') - k\cos 20'' \end{cases}$$

qui donnent $\cos 30''$ et $\sin 30''$. Cette formule, comme on voit, donne les *différences* $\cos 30'' - \cos 20''$ et $\sin 30'' - \sin 20''$ connaissant les différences $\cos 20'' - \cos 10''$ et $\sin 20'' - \sin 10''$ calculées plus haut.

D'une façon générale, les formules de Simpson donnent les différences $\sin(m+1)10'' - \sin m10''$ et $\cos(m+1)10'' - \cos m10''$ des lignes de deux arcs consécutifs, connaissant les différences précédentes. Le calcul de chaque nouvelle différence n'exige qu'*une* multiplication par le facteur k.

105. Simplifications. — Il est, d'abord, facile de se rendre compte qu'il suffit de calculer les cosinus et les sinus des arcs de 0° à 45° pour avoir les cosinus et les sinus des arcs de 0° à 90°.

En effet, si A est un arc compris entre 45° et 90°, son complément 90° — A est compris entre 0° et 45°. Or, on a :

$$\cos A = \sin(90^\circ - A),$$
$$\sin A = \cos(90^\circ - A).$$

Donc, dès qu'on connaît les lignes de l'arc 90° — A, on connaît celles de A.

Il est même facile de se rendre compte qu'il suffit de calculer, par les formules de Simpson, les cosinus et sinus des arcs de 0° à 30° et qu'on peut trouver, pour les arcs de 30° à 45°, une formule plus simple.

Les formules (1) et (4) du n° 91 donnent, en effet,

$$\sin(a+b) = 2\sin a \cos b - \sin(a-b),$$
$$\cos(a+b) = \cos(a-b) - 2\sin a \sin b.$$

Faisons, dans ces formules,

$$a = 30^\circ, \qquad b = A,$$

et remarquons que (n° 72)

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

elles deviennent :

$$\sin(30^\circ + A) = \cos A - \sin(30^\circ - A),$$
$$\cos(30^\circ + A) = \cos(30^\circ - A) - \sin A.$$

Ces relations donnent, *par de simples soustractions*, les cosinus et sinus des arcs $30^\circ + A$, plus grands que 30°, connaissant celles des arcs A et $30^\circ - A$ plus petits que 30°.

106. Vérifications. — Dans l'emploi répété des formules de Simpson, les erreurs commises dans les calculs s'accumulent évidemment et, si on les appliquait sans interruption de 0° à 30°, les dernières valeurs calculées seraient beaucoup moins approchées que les premières. Il est donc bon de vérifier les calculs et de rectifier les erreurs en calculant, de temps en temps, quelques lignes directement. Pour cela, on calcule directement les cosinus et sinus des arcs de 9° en 9°.

Ceci est facile ; on a, en effet,

$$9^\circ = \frac{18^\circ}{2},$$

et, comme nous connaissons les lignes de l'arc de 18° (n° 72), il nous sera facile de calculer celles de l'arc moitié. On a :

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4},$$

on en conclut, en vertu des formules (3) du n° 87,

$$\sin 9^\circ = \frac{1}{4}\left[\sqrt{\sqrt{5}+3} - \sqrt{5-\sqrt{5}}\right],$$

$$\cos 9^\circ = \frac{1}{4}\left[\sqrt{\sqrt{5}+3} + \sqrt{5-\sqrt{5}}\right].$$

On a, d'ailleurs (n° 72), cos 18° et sin 18°. Les formules d'addition donneront cos 27° et sin 27°, etc.

S'il y avait lieu, on pourrait, en divisant encore par 2, une ou plusieurs fois, calculer directement les lignes d'arcs plus rapprochés.

On pourrait remarquer, d'ailleurs, que, puisqu'on a les lignes trigonométriques des arcs de

$$45^\circ, \quad 30^\circ, \quad 18^\circ, \quad 9^\circ,$$

les formules d'addition permettent de calculer, *par de simples extractions de racines carrées*, celles de

$$\begin{aligned} 15^\circ &= 45^\circ - 30^\circ, & 21^\circ &= 30^\circ - 9^\circ, \\ 12^\circ &= 30^\circ - 18^\circ, & 24^\circ &= 30^\circ - 6^\circ, \\ 6^\circ &= 18^\circ - 12^\circ, & 27^\circ &= 45^\circ - 18^\circ, \\ 3^\circ &= 18^\circ - 15^\circ. \end{aligned}$$

On a, par exemple,

$$\text{Cos } 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1+\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Sin } 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

107. Remarque. — Les procédés que nous venons d'exposer fournissent le moyen de calculer les cosinus et sinus des arcs de 0° à 90°. Le problème de la réduction des arcs au premier quadrant, que nous avons traité au n° 57 nous montre que l'on connaît, dès lors, les cosinus et les sinus de tous les arcs.

Le calcul des tangentes se fait par la formule

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

D'ailleurs, comme on ne se sert, d'ordinaire, que de tables donnant les *logarithmes* des lignes trigonométriques et non ces lignes elles-mêmes, on a, de suite, par une simple addition, les logarithmes des tangentes par la formule

$$log\ \operatorname{tg} x = log \sin x + colog \cos x \ [1].$$

(1) Voir pour la théorie et l'usage des logarithmes, le chapitre III du livre V de mes *Leçons d'Algèbre*.

CHAPITRE III

DISPOSITION ET USAGE DES TABLES

108. — Il existe deux sortes de tables trigonométriques.

1° Les tables qui donnent *les valeurs elles-mêmes* des lignes trigonométriques de 0° à 90°. Ces tables sont d'un usage peu fréquent en mathématiques; elles servent surtout aux physiciens, plus particulièrement dans les calculs cristallographiques.

Leur emploi ne demande aucune étude préliminaire.

2° Les tables logarithmiques qui donnent les *logarithmes* des lignes trigonométriques des angles de 0° à 90°.

Ce sont celles qui sont le plus usitées en mathématiques; leur emploi, d'ailleurs, donne lieu à des calculs plus simples.

Nous ne nous occuperons, dans la suite, que de cette dernière catégorie de tables.

109. Disposition des tables logarithmiques. — Il existe des tables donnant les logarithmes des lignes trigonométriques avec un plus ou moins grand nombre de décimales exactes (en général 4, 5 ou 7); nous nous contenterons de décrire les tables à 7 décimales telles que celles de Callet, Dupuis et Schrön.

Une telle table est à *simple entrée* et contient les logarithmes des cosinus, sinus, tangentes et cotangentes des angles de 0° à 90°, de 10 secondes en 10 secondes.

Une remarque, que nous avons déjà faite plus haut (n° 105), a permis, immédiatement, de diminuer de moitié la dimension d'une telle table. En effet, deux angles complémentaires ont, respectivement, pour sinus, cosinus, tangente et cotangente les cosinus, sinus, cotangente et tangente l'un de l'autre. Si, par exemple, dans une colonne, sont rangés, de haut en bas, les logarithmes des *sinus* des angles de 21°40′ à 21°50′, de 10″ en 10″, en lisant cette même colonne de bas en haut, on aura les logarithmes des *cosinus* des angles complémentaires, c'est-à-dire les logarithmes des cosinus des angles de 68°10′ à 68°20′, de 10″ et 10″. D'après cela, il suffit de former la table pour les angles de 0° à 45°, puis de la lire en sens inverse pour avoir les logarithmes des lignes des angles de 45° à 90°, à condition, bien entendu, d'intervertir les cosinus et sinus, les

tangentes et cotangentes. Dans la recherche des logarithmes des lignes des angles de 0° à 45° on lit la table de *haut en bas;* pour les angles de 45° à 90° on la lit de *bas en haut.*

Pour les recherches dans la table, nous distinguerons donc deux cas.

1° *L'angle est plus petit que* 45°. — Soit, par exemple, à trouver dans la table

$$\log \cos (21^\circ\, 42'\, 30'').$$

Pour cela, nous cherchons la page *au haut* de laquelle est inscrit 21°. Dans la première colonne *de gauche* nous cherchons le nombre 42 qui donne les minutes; puis, dans la seconde colonne de gauche, entre 42 et 43 de la première colonne, nous nous arrêtons au nombre 30 qui donne les secondes. Les logarithmes des lignes de l'angle de 21° 42′ 30″ se trouvent inscrits dans la ligne horizontale à laquelle nous sommes ainsi conduits. Ainsi *log* cos (21° 42′ 30″) se trouve à l'intersection de cette ligne et de la colonne qui porte *en haut* l'indication *cos.* ou *co-sin.;* on trouve :

$$\log \cos (21^\circ\, 42'\, 30'') = \bar{1},9680525 \text{ (1)}.$$

2° *L'angle est plus grand que* 45°. — Soit à trouver dans la table

$$\log \operatorname{cotg} (63^\circ\, 15'\, 20'').$$

On cherche, dans la table, les pages *au bas* desquelles sont inscrites 63°; puis, dans les premières colonnes à *droite*, *en remontant*, le nombre 15 des minutes. Entre 15 et 16, *en remontant* dans la seconde colonne de *droite*, on s'arrête à 20, nombre des secondes. La ligne horizontale à laquelle on parvient ainsi contient les logarithmes des lignes de l'angle de 63° 15′ 20″. Par exemple, le *log* cotg se trouve à l'intersection de cette ligne horizontale et de la colonne *au bas* de laquelle est inscrit *co-tang*. On trouve, dans le cas présent,

$$\log \operatorname{cotg} (63^\circ\, 15'\, 20'') = \bar{1},7023615.$$

(1) Dans certaines tables anciennes, comme celle de Callet, les caractéristiques négatives sont augmentées de 10. Ainsi, dans la table de Callet, on trouve

$$9,9680525$$

au lieu de

$$\bar{1},9680525.$$

Ceci ne peut donner lieu à aucune ambiguïté ; car on sait d'avance le signe de la caractéristique. En effet, les caractéristiques des *log* sin et *log* cos sont toutes *négatives* puisque le sinus et le cosinus sont plus petits que 1. Pour les tangentes, comme les tangentes de 0° à 45° sont plus petites que 1, les carastéristiques des *log* tg sont négatives; de 45° à 90° les caractéristiques des *log* tg sont positives, puisque les tangentes sont plus grandes que 1.

110. — La table contient, outre les colonnes dont nous avons parlé, trois petites colonnes intitulées *diff.* qui donnent, toutes calculées, les différences successives entre les parties décimales de deux logarithmes consécutifs, différences qui nous seront utiles dans la suite.

Ainsi, par exemple, on trouve, dans la table,

$$log \sin (34^\circ 5' 20'') = \bar{1}, 7485589$$

et

$$log \sin (34^\circ 5' 30'') = \bar{1}, 7485900.$$

La différence entre les parties décimales de ces deux logarithmes,

$$7485900 - 7485589 = 311,$$

se trouve inscrite, dans la colonne intitulée *diff.* située à droite de la colonne *sin*, en face de l'intervalle qui sépare les deux logarithmes.

Pour les différences relatives aux logarithmes des tangentes et cotangentes, il suffit d'une seule colonne *commune*, en vertu de la remarque suivante :

La différence entre les logarithmes des tangentes de deux angles est égale, en valeur absolue, à la différence entre les logarithmes de leurs cotangentes.

Soient, en effet A et B deux angles, on a :

$$\text{cotg A} = \frac{1}{\text{tg A}}, \quad \text{cotg B} = \frac{1}{\text{tg B}}.$$

Par suite,

$$log \text{ cotg A} = - log \text{ tg A}, \; log \text{ cotg B} = - log \text{ tg B}.$$

on a donc :

$$log \text{ cotg A} - log \text{ cotg B} = - \left[log \text{ tg A} - log \text{ tg B}\right].$$

Les deux différences sont donc égales, en valeur absolue, mais de signes contraires.

En vertu de cette propriété, il suffit d'*une seule* colonne, intitulée *diff. comm.* et placée entre les colonnes des tangentes et des cotangentes, pour donner les différences des *log* tg. et *log* cotg. des angles consécutifs.

Enfin, certaines tables contiennent, en marge, des petites tables de parties proportionnelles dont l'usage sera donné plus loin.

111. Usage des tables (1). — Les tables que nous venons de décrire nous permettront de résoudre les deux questions suivantes :

1° *Étant donné un angle plus petit que* 90°, *trouver le logarithme d'une ligne trigonométrique de cet angle;*

2° *Étant donné le logarithme d'une certaine ligne trigonométrique d'un angle, compris entre* 0° et 90°, *trouver cet angle.*

Ces deux problèmes présentent quelques différences suivant qu'il s'agit du sinus et de la tangente ou du cosinus et de la cotangente. Nous traiterons séparément les deux cas.

112. Problème I. — *Calculer le logarithme du sinus ou de la tangente d'un angle donné.*

Si l'angle donné contient un nombre de secondes qui est multiple de 10, le logarithme cherché se trouve immédiatement dans la table, comme nous l'avons expliqué plus haut, sans aucun calcul auxiliaire.

Supposons, maintenant, ce qui sera le cas général, que le nombre des secondes ne soit pas un multiple de 10. Soit, par exemple, à trouver

$$log \sin (57^\circ 17' 44'',81).$$

Comme le sinus *croît* lorsque l'angle *croît* de 0° à 90°, il en résulte que

$$log \sin (57^\circ 17' 40'')$$

est une valeur approchée *par défaut* du logarithme cherché. On trouve, dans la table (en la lisant de bas en haut, puisque l'angle est plus grand que 45°),

$$log \sin (57^\circ 17' 40'') = \bar{1},9250326.$$

Pour obtenir le logarithme demandé, il faut augmenter la partie décimale de ce logarithme d'une certaine quantité que nous allons calculer par la méthode des parties proportionnelles.

On admet, ce qui est suffisamment exact, que l'accroissement du log sin. *est proportionnel à l'accroissement de l'angle, lorsque cet accroissement est très petit.*

Cela étant, on lit, dans la colonne *diff.* (de bas en haut), que l'excès de *log* sin (57° 17′ 50″) sur *log* sin (57° 17′ 40″) est, pour la partie décimale, 136. La partie décimale du *log* sin augmentant

(1) Nous conseillons vivement au lecteur de relire, avant ce paragraphe, le chapitre III du livre V des *Leçons d'Algèbre*, relatif aux logarithmes.

de 136 lorsque l'angle augmente de 10″, elle croît, en vertu de l'hypothèse de la proportionnalité faite plus haut, de

$$4,81 \times \frac{136}{10} = 4,81 \times 13,6 = 65,416,$$

lorsque l'angle croît de 4″,81. La partie décimale de

$$\log \sin (57^\circ 17' 44'',81)$$

est donc :

$$9250326 + 65 = 9250391\,;$$

car on néglige les chiffres au delà du septième. Cependant, si le huitième chiffre était plus grand que 5, on forcerait le septième d'une unité.

Lorsque la table contient des tables de parties proportionnelles (*p.p.*), on trouve, dans ces petites tables, les produits, tout effectués, de 13,6 par les nombres de 1 à 9. Voici, dans ce cas, comment on dispose le calcul :

pour. . . .	57° 17′ 40″	$\bar{1}$, 9250326	$\Delta = 136$
pour. . . .	4″	54,4	
pour. . . .	0″,8	10,88	
pour. . . .	0″,01	0,136	
log sin (57° 17′ 44″,81)	=	$\bar{1}$, 9250391.	

La question se traiterait de la même façon s'il s'agissait d'une tangente, parce que la tangente d'un angle varie, comme le sinus, dans le même sens que l'angle.

Exemple. — *Calculer*

$$\log \operatorname{tg} (28^\circ 43' 37'', 64).$$

pour	28° 43′ 30″	$\bar{1}$,7388212	$\Delta = 499$
pour	7″	349,3	
pour	0″,6	29,94	
pour	0″,04	1,996	
log tg (28° 43′ 37″, 64)	=	$\bar{1}$,7388593.	

113. Problème II. — *Calculer le logarithme du cosinus ou de la cotangente d'un angle donné.*

Nous ferons, immédiatement, la remarque suivante : le cosinus et la cotangente d'un angle compris entre 0° et 90° varient en *sens*

inverse de cet angle. Au plus grand angle correspond donc le plus petit cosinus ou la plus petite cotangente. Il en résulte que, si l'on veut avoir une valeur, approchée *par défaut*, du logarithme du cosinus ou de la cotangente d'un angle, il faudra prendre le logarithme du cosinus ou de la cotangente de l'angle, immédiatement *supérieur* à l'angle donné, qui se trouve dans la table.

Ainsi, soit à calculer

$$log \cos (36^\circ\ 25'\ 52'',73).$$

Nous chercherons, dans la table, *log* cos (36° 26′ 0″) qui sera une valeur approchée *par défaut* du logarithme cherché. On trouve :

$$log \cos (36^\circ\ 26'\ 0'') = \bar{1},9055522.$$

Or, la différence entre ce logarithme et celui qui correspond à l'angle *précédent* est (voir dans la colonne *diff.*) 155. Nous raisonnerons, alors, de la façon suivante, en admettant, comme toujours, la loi de proportionnalité.

Lorsque l'angle *diminue* de 10″, la partie décimale du *log* cos. *augmente* de 155. Pour obtenir 36° 25′ 52″,73, il faut diminuer 36° 26′ 0″ de 7″,27. Donc, lorsque l'angle *diminue* de 7″,27, la partie décimale du *log* cos *augmente* de :

$$7,27 \times \frac{155}{10} = 7,27 \times 15,5 = 112,685.$$

On prend 113, en forçant le dernier chiffre d'une unité, parce que celui qui suit la virgule est plus grand que 5, et on a, pour la partie décimale du logarithme cherché,

$$9055522 + 113 = 9055635.$$

Lorsque l'on a une petite table de parties proportionnelles (*p. p.*), on dispose les calculs ainsi :

pour	36° 26′ 0″	$\bar{1}$,9055522	Δ = 155
pour.	— 7″	108,5	
pour.	— 0,″2	3,1	
pour.	— 0″0,7	1,085	

$$log \cos (36^\circ\ 25'\ 52'',73) = \bar{1},9055635.$$

On agirait de la même manière dans le cas de la cotangente.

Exemple. — *Calculer*

$$log\ \text{cotg}\,(73^\circ\,5'\,32'',93).$$

pour	73° 5′ 40″	$\bar{1}$,4827724	$\Delta = 756$
pour	— 7″	529,2	
pour	— 0″,07	5,292	
	log cotg (73° 5′ 32″,93) =	$\bar{1}$,4828258.	

114. Problème inverse I. — *Connaissant le logarithme du sinus ou de la tangente d'un angle, calculer cet angle.*

Proposons-nous, par exemple, de rechercher l'angle A, sachant que

$$log\ \text{tg}\ A = 0{,}2893451.$$

Nous rechercherons, pour cela, le plus grand angle, figurant dans la table, dont le *log* tg est contenu dans le logarithme donné. — Comme ce logarithme est positif, cet angle sera plus grand que 45°, puisque sa tangente est plus grande que 1; il faut donc lire la table de bas en haut. — Nous trouvons ainsi que cet angle est : 62° 48′ 40″, dont le logarithme de la tangente est : 0,2893031.

Nous avons là une valeur approchée par défaut de l'angle cherché A. Pour calculer les secondes, dixièmes et centièmes de secondes, nous appliquerons encore la méthode de proportionnalité. La différence entre la partie décimale du logarithme donné et celle de *log* tg (62° 48′ 40″) est :

$$\delta = 420.$$

Or, la différence entre *log* tg (62° 48′ 40″) et le logarithme suivant est (voir dans la colonne *diff. com.*)

$$\Delta = 518,$$

différence qui correspond à un accroissement de l'angle de 10″. Si s est donc le nombre des secondes cherchées, on aura :

$$\frac{s}{10} = \frac{\delta}{\Delta} = \frac{420}{518}.$$

D'où

$$s = \frac{420}{51{,}8} = 8{,}10.$$

On pourra se servir des tables de parties proportionnelles pour faire la division de 420 par 51,8. On cherchera, à cet effet, le plus grand multiple de 51,8 contenu dans 420. On retranchera ce multiple de 420 et on cherchera le plus grand multiple 5,18 contenu dans cette différence, et ainsi de suite.

Voici comment on disposera l'opération :

$$log \operatorname{tg} A = 0{,}2893451.$$

pour	0,2893031	62° 48′ 40″	Δ = 518
diff. =	420		
pour.	414,4	8″	
diff. =	5,6		
pour.	5,1	0″,10	
		A = 62° 48′ 48″,10.	

On procéderait de même dans le cas du logarithme du sinus.

Exemple. — *Calculer l'angle* A, *sachant que*

$$log \sin A = \bar{1}{,}7536815.$$

pour	$\bar{1}$,7536790	34° 33′ 0″	Δ = 305
diff. =	25		
pour.	24,4	0″,8	
diff. =	0,6		
pour.	0,6	0″,02	
	A =	34° 33′ 0″,82.	

115. Problème inverse II. — *Connaissant le logarithme du cosinus ou de la cotangente d'un angle plus petit que* 90°, *calculer cet angle.*

Comme le cosinus et la cotangente varient en sens inverse de l'angle, il faudra, pour avoir une valeur de l'angle approchée *par défaut*, prendre, dans la table, un angle dont le *log* cos. ou le *log* cotg. soit *supérieur* au logarithme donné.

Soit, par exemple, à calculer l'angle A tel que

$$log \cos A = \bar{1}{,}5152807.$$

Le logarithme de la table immédiatement *supérieur* à celui-ci est :

$$log \cos (70° \, 52' \, 40'') = \bar{1}{,}5153232\,;$$

70° 52′ 40″ est donc une valeur approchée *par défaut* de A.

Pour calculer les secondes et fractions de secondes, appliquons la

règle de proportionalité. La différence entre *log* cos (70° 52′ 40″) et le logarithme donné est

$$\delta = -425.$$

La différence entre ce logarithme et le logarithme suivant dans la table est (colonne *diff.*)

$$\Delta = -608.$$

Le nombre s de secondes cherché est donc tel que :

$$\frac{s}{10} = \frac{\delta}{\Delta} = \frac{425}{608};$$

d'où

$$s = \frac{425}{60,8} = 6,99.$$

En se servant de la table des parties proportionnelles, on dispose ainsi le calcul :

$$log \cos A = \overline{1},5152807.$$

pour.	$\overline{1}$,5153232	70° 52′ 40″	Δ = 608
diff. =	— 425		
pour.	— 364,8	6″	
diff. =	— 60,2		
pour.	— 54,72	0″,9	
diff. =	— 5,48		
pour.	— 5,47	0″,09	
		A = 70° 52′ 46″,99.	

On procéderait de même dans le cas où on donnerait le logarithme de la cotangente, puisque la cotangente, comme le cosinus, varie en sens inverse de l'angle.

Exemple. — *Calculer l'angle* A, *sachant que*

$$log \operatorname{cotg} A = 0,4583712.$$

pour	0,4583965	19° 11′ 20″	Δ = 678
diff. =	— 253		
pour.	— 203,4	3″	
diff. =	— 49,6		
pour.	— 47,46	0 ′,7	
diff. =	— 2,14		
pour.	— 2,03	0″,03	
	A =	19° 11′ 23″,73.	

116. Remarque I. — Un angle est déterminé avec plus de précision lorsqu'on connaît le logarithme de sa tangente que lorsqu'on connaît celui du sinus ou du cosinus.

En effet, la différence tabulaire entre les *log* tg. est égale à la *somme* des différences tabulaires correspondantes du *log* sin. et du *log* cos. Car, puisqu'on a :

$$log \text{ tg } x = log \sin x - log \cos x,$$
$$log \text{ tg } (x + 10'') = log \sin (x + 10'') - log \cos (x + 10''),$$

si on pose

$$log \text{ tg } (x + 10'') - log \text{ tg } x = \Delta,$$
$$log \sin (x + 10'') - log \sin x = \delta,$$
$$log \cos (x + 10'') - log \cos x = - \delta',$$

on a :

$$\Delta = \delta + \delta'.$$

La différence tabulaire pour les *log* tg. est donc plus grande que pour les *log* sin. et *log* cos. Or, plus la différence tabulaire sera grande, plus l'angle sera déterminé avec précision, puisqu'une très faible variation de l'angle se traduira par une assez grande variation du logarithme.

Remarque II. — Les tables ne donnent pas, en général, les logarithmes des sécantes et cosécantes; mais, dès qu'on connaît les logarithmes des sinus et cosinus, on a, de suite, ceux des sécantes et des cosécantes.

En effet, puisque

$$\text{séc } x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \text{cosée } x = \frac{1}{\sin x},$$

on a :

$$log \text{ séc } x = colog \cos x, \qquad log \text{ coséc } x = colog \sin x.$$

EXERCICES

37. Calculer, au moyen des tables :

$$log \cos (48° \ 7' \ 22'', 35),$$
$$log \text{ cotg } (75° \ 10' \ 31'', 29),$$
$$log \text{ séc } (10° \ 23' \ 22'', 71),$$
$$log \text{ coséc } (63° \ 58' \ 6'', 27),$$
$$log \sin (57° \ 17' \ 44'', 81).$$

Calculer l'angle x dans les cas suivants :

$$log \sin x = \bar{1},7563811,$$
$$log \cos x = \bar{1},2345633,$$
$$log \text{ tg } x = 0,5412134,$$
$$log \text{ séc } x = 0,2375843,$$
$$log \text{ coséc } x = 0,5152663.$$

CHAPITRE IV

RENDRE UNE FORMULE CALCULABLE PAR LOGARITHMES

117. Énoncé du problème. — Une formule qui fournit une quantité inconnue en fonction de plusieurs autres connues, est dite *calculable par logarithmes*, si on peut trouver *directement* le logarithme de la quantité inconnue, connaissant les logarithmes des données, sans revenir, pour ces données, des logarithmes aux nombres.

Pour qu'une formule soit calculable par logarithmes, il faut et il suffit que les données ne soient reliées entre elles que par des signes opératoires autres que le signe (+) *ou le signe* (—). On a, en effet, immédiatement, d'après les propriétés connues des logarithmes [1], le logarithme d'un produit, d'un quotient, d'une puissance, d'un radical, connaissant les logarithmes des quantités qui y figurent; tandis que cela n'a pas lieu pour une somme ou pour une différence.

Comme les tables trigonométriques ne fournissent que les logarithmes des lignes trigonométriques des angles et non les lignes elles-mêmes, il est intéressant que les formules soient toutes calculables par logarithmes, pour éviter d'avoir à faire le calcul des valeurs elles-mêmes des lignes, connaissant leurs logarithmes.

Pour nous rendre compte de l'importance de ce fait, prenons un exemple.

Étant donnés deux angles A et B, supposons qu'on veuille calculer l'angle x tel que

$$2 \sin x = \sin A + \sin B. \qquad (1)$$

Si on se servait de la formule (1) il faudrait : 1° calculer *log* sin A et *log* sin B. 2° Connaissant ces deux logarithmes, il faudrait, en se servant de la table de logarithmes ordinaire, calculer sin A et sin B. On aurait, alors,

$$\sin A + \sin B.$$

(1) Voir pour les propriétés des logarithmes, le n° 137 de mes *Leçons d'Algèbre élémentaire.*

3° On calculerait

$$log\,[\sin A + \sin B],$$

ce qui donnerait

$$log \sin x = log\,[\sin A + \sin B] + colog\, 2.$$

4° Enfin, on calculerait l'angle x connaissant $log \sin x$. On aurait donc *six* calculs logarithmiques à faire, ce qui, non seulement serait long, mais encore risquerait fort d'accumuler les erreurs.

Au contraire, si, à l'aide des formules [**50**], on écrit la formule (1) sous la forme :

$$(2) \qquad \sin x = \sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2},$$

on évitera tous les retours des logarithmes aux nombres et on n'aura que *trois* calculs à faire ; à savoir : 1° les calculs de $log \sin \frac{A+B}{2}$ et $log \cos \frac{A-B}{2}$, ce qui donnera, par addition, $log \sin x$. 2° Connaissant $log \sin x$, on calculera x.

Lorsqu'une formule n'est pas calculable par logarithmes, *rendre cette formule calculable par logarithmes*, c'est la remplacer par une autre formule qui soit calculable par logarithmes.

Ainsi, par exemple, on peut dire que la formule (2) est la formule (1) rendue calculable par logarithmes.

Les formules de transformations de sommes en produits du chapitre VIII (n°s 91 à 97) résolvent immédiatement la question *dans certains cas particuliers;* mais les choses ne se passent pas toujours aussi simplement. Dans les cas généraux, il faudra, pour rendre une expression calculable par logarithmes, introduire un ou plusieurs angles auxiliaires dont les valeurs seront données par des formules logarithmiques.

118. Transformation d'une somme. — Transformation de $A + B$. — Soient A et B deux quantités positives *dont on ne connait que les logarithmes*, il s'agit de calculer $log\,(A + B)$, sans calculer A et B.

A cet effet, écrivons, en mettant A en facteur,

$$A + B = A\left[1 + \frac{B}{A}\right];$$

et posons :

$$(1) \qquad \mathrm{tg}^2\varphi = \frac{B}{A}.$$

L'angle φ, ainsi défini, sera facile à calculer, connaissant *log* A et *log* B, puisque

$$log\ \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{1}{2}[log\,B + colog\,A].$$

Ayant calculé φ, on aura :

$$A + B = A[1 + \mathrm{tg}^2\varphi]$$

et, comme

$$1 + \mathrm{tg}^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi},$$

$$(2) \qquad A + B = \frac{A}{\cos^2\varphi}.$$

L'expression A + B est ainsi rendue calculable par logarithmes et on a :

$$log\,(A + B) = log\,A + 2\,colog\,\cos\varphi.$$

Remarque. — Il est facile de se rendre compte que l'emploi de l'angle auxiliaire φ donne bien une simplification de calcul. En effet, on n'aura, ainsi, que deux calculs logarithmiques à faire, celui de φ et celui de *log* cos φ; tandis que directement il aurait fallu faire *trois* calculs logarithmiques : ceux de A et B, connaissant *log* A et *log* B, et celui de *log* (A + B), connaissant A + B.

119. Transformation de A — B. — Soient A et B deux quantités positives, A étant plus grande que B, dont on ne connaît que les logarithmes, calculer *log* (A — B).

Écrivons, en mettant A en facteur,

$$A - B = A\left[1 - \frac{B}{A}\right].$$

B étant plus petit que A, $\frac{B}{A}$ est plus petit que 1 et il existe un angle φ tel que l'on ait :

$$(1) \qquad \sin^2\varphi = \frac{B}{A}.$$

Cet angle φ se calculera aisément, ne connaissant que $log\, A$ et $log\, B$, car

$$log \sin \varphi = \frac{1}{2}\left[log\, B + colog\, A\right].$$

Ayant calculé φ, on aura :

$$A - B = A\,[1 - \sin^2 \varphi]$$

et, par suite,

$$(2) \qquad A - B = A \cos^2 \varphi.$$

A — B est ainsi devenu calculable par logarithmes, car

$$log\,(A - B) = log\, A + 2\, log \cos \varphi.$$

120. Remarque. — On pourrait indiquer une méthode de transformation qui s'appliquerait, à la fois, aux deux cas A + B et A — B.

Écrivons, en effet,

$$A \pm B = A\left[1 \pm \frac{B}{A}\right]$$

et posons

$$(1) \qquad \mathrm{tg}\, \varphi = \frac{B}{A},$$

ce qui est toujours possible puisque la tangente peut prendre toutes les valeurs possibles.

Ayant calculé φ par cette formule,

$$log\ \mathrm{tg}\, \varphi = log\, B + colog\, A,$$

on aura :

$$A \pm B = A\,[1 \pm \mathrm{tg}\, \varphi] = A\,[\mathrm{tg}\, 45^\circ \pm \mathrm{tg}\, \varphi].$$

D'après la formule [**52**], on a :

$$\mathrm{tg}\, 45^\circ \pm \mathrm{tg}\, \varphi = \frac{\sin (45^\circ \pm \varphi)}{\cos 45^\circ \cos \varphi},$$

ce qui donne

$$(2) \qquad A \pm B = A\, \frac{\sin (45^\circ \pm \varphi)}{\cos 45^\circ \cos \varphi},$$

formule calculable par logarithmes.

Cette transformation, sauf dans des cas spéciaux où l'angle φ se présente dans d'autres calculs, est moins avantageuse que les deux précédentes, car elle exige un plus grand nombre de calculs logarithmiques.

Cependant, si on a, *à la fois*, à calculer $log\,(A + B)$ et $log\,(A - B)$, elle sera préférable, car *le même* angle auxiliaire φ servira dans les deux cas.

121. Cas général. — Il nous sera facile, maintenant, de transformer une somme quelconque. Soit à calculer

$$log\,(A \pm B \pm C \pm D \pm \ldots)$$

connaissant

$$log\,A,\ \ log\,B,\ \ log\,C,\ \ log\,D,\ \ldots$$

Pour cela, nous rendrons, d'abord, $A \pm B$ calculable par logarithmes, ce qui nous donnera $log\,(A \pm B)$ au moyen d'un premier angle auxiliaire φ. Puis, $(A \pm B)$ étant considéré comme effectué, on rendra calculable par logarithmes $(A \pm B) \pm C$ par l'introduction d'un second angle auxiliaire ψ. Il faudra un troisième angle auxiliaire θ pour rendre calculable par logarithmes $A \pm B \pm C \pm D$; et ainsi de suite.

Soit, par exemple,

$$A + B - C.$$

Nous posons, d'abord,

$$(1) \qquad \mathrm{tg}^2\,\varphi = \frac{B}{A}$$

et nous avons :

$$(2) \qquad A + B = \frac{A}{\cos^2\varphi};$$

on en conclut

$$A + B - C = \frac{A}{\cos^2\varphi} - C.$$

Posons, enfin,

$$(3) \qquad \sin^2\psi = \frac{C\cos^2\varphi}{A},$$

et nous aurons :

$$(4) \qquad A + B - C = \frac{A\cos^2\psi}{\cos^2\varphi}.$$

On calculera donc : 1° φ par la formule (1); 2° ψ par la formule (3), connaissant φ; 3° Connaissant, enfin, φ et ψ, nous aurons

$$\log(A + B - C)$$

par la formule (4).

122. Expressions rationnelles. — Soit à rendre calculable par logarithmes une expression de la forme

$$\frac{A \pm B \pm C \pm \ldots.}{A' \pm B' \pm C' \pm \ldots.}.$$

Il suffit, pour cela, de rendre, séparément, calculables par logarithmes le numérateur et le dénominateur ; car le logarithme de l'expression est la différence des logarithmes des deux termes.

Application. — *Calculer* $\log \frac{a - b}{a + b}$ *connaissant* $\log a$ *et* $\log b$.

On transforme $a - b$ et $a + b$ et, ici, comme on a les deux quantités, *à la fois*, on appliquera la méthode du n° 120.

On pose

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a},$$

et on a :

$$a - b = \frac{a \sin(45^\circ - \varphi)}{\cos 45^\circ \cos\varphi},$$

$$a + b = \frac{a \sin(45^\circ + \varphi)}{\cos 45^\circ \cos\varphi}.$$

On a donc

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{\sin(45^\circ - \varphi)}{\sin(45^\circ + \varphi)}.$$

Si on remarque que

$$\sin(45^\circ + \varphi) = \cos(45^\circ - \varphi)$$

parce que les angles $45^\circ + \varphi$ et $45^\circ - \varphi$ sont complémentaires, cette formule devient

$$\text{(2)} \qquad \frac{a - b}{a + b} = \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi).$$

On aurait pu, d'ailleurs, l'obtenir directement de la façon suivante :

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{1 - \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a}}.$$

Or, comme

$$\operatorname{tg} 45^\circ = 1,$$

ceci peut s'écrire :

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} \varphi} = \operatorname{tg} (45^\circ - \varphi),$$

en vertu de la formule [**40**]^{bis}.

123. Expressions irrationnelles. — Pour rendre une expression de la forme

$$\sqrt[m]{E}$$

calculable par logarithmes, il suffit de savoir traiter la question pour l'expression E placée sous le radical; car, dès qu'on connaît *log* E, on a :

$$log \sqrt[m]{E} = \frac{1}{m} . log\, E.$$

Exemple. — *Rendre calculable par logarithmes* $\sqrt{a^2 + b^2}$.

On pose :

$$\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{b^2}{a^2}, \qquad \text{d'où} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a},$$

et on a :

$$a^2 + b^2 = \frac{a^2}{\cos^2\varphi}.$$

Par suite,

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{a}{\cos\varphi}.$$

124. Remarque. — On peut souvent profiter de la forme spéciale des données pour simplifier les transformations. Ainsi, comme nous l'avons vu (liv. I, chap. VIII), on peut rendre calculables par logarithmes toutes les expressions

$$\sin p \pm \sin q, \qquad \cos p \pm \cos q, \qquad \sin p \pm \cos q,$$
$$\operatorname{tg} p \pm \operatorname{tg} q, \qquad \operatorname{cotg} p \pm \operatorname{cotg} q, \text{ etc.},$$

sans se servir *d'aucun angle auxiliaire*.

Voici encore un exemple de ce genre :

Application. — b, c, *étant deux longueurs connues et* A *un angle donné, calculer*

$$log \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}.$$

En suivant la méthode générale, il faudrait deux angles auxiliaires. Nous allons voir que, si on suppose b et c connues *elles-mêmes*, et non leurs logarithmes, il suffira d'*un seul* angle auxiliaire. On a, en effet,

$$\cos A = \cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2},$$

$$1 = \cos^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{A}{2}.$$

par suite,

$$\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A} =$$

$$\sqrt{(b^2 + c^2)\left(\cos^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{A}{2}\right) - 2bc\left(\cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{(b - c)^2 \cos^2 \frac{A}{2} + (b + c)^2 \sin^2 \frac{A}{2}}.$$

Sous le radical il ne figure plus ainsi qu'une somme de *deux* termes. Nous aurons donc :

$$\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A} = (b + c) \sin \frac{A}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{b - c}{b + c}\right)^2 \cot\text{g}^2 \frac{A}{2}}.$$

Posons :

$$\text{(1)} \qquad \text{tg}\, \varphi = \frac{b - c}{b + c} \cot\text{g} \frac{A}{2},$$

il vient, enfin,

$$\text{(2)} \qquad \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A} = \frac{(b + c) \sin \frac{A}{2}}{\cos \varphi}.$$

— Si, contrairement à notre hypothèse, on ne connaissait que $\log b$ et $\log c$, il faudrait toujours *deux* angles auxiliaires. On poserait :

$$\text{(3)} \qquad \text{tg}\, \psi = \frac{c}{b};$$

on aurait :

$$\text{(4)} \qquad \text{tg}\, \varphi = \text{tg}\, (45^\circ - \psi) \cot\text{g} \frac{A}{2},$$

et, enfin,

$$\text{(5)} \qquad \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A} = \frac{b \sin (45^\circ + \psi) \sin \frac{A}{2}}{\cos 45^\circ \cos \psi \cos \varphi}.$$

125. Résolution trigonométrique d'une équation du second degré. — Le problème que nous nous proposons de résoudre est le suivant :

Étant donnée l'équation du second degré

$$(1) \qquad ax^2 + bx + c = 0,$$

dont les deux racines existent, calculer ces deux racines, connaissant les logarithmes des valeurs absolues des coefficients.

Première méthode. — La formule connue [1] de résolution de l'équation (1) est :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ceci peut s'écrire :

$$(2) \qquad x = -\frac{b}{2a}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4ac}{b^2}}\right],$$

en mettant b^2 en facteur sous le radical et faisant sortir b de ce radical. (Les signes $\pm$ de cette formule ne correspondent pas nécessairement à ceux de la formule précédente.)

Pour rendre la formule (2) calculable par logarithmes, nous distinguerons deux cas :

1° *Les deux racines de l'équation sont de même signe.*

On a donc :

$$ac > 0.$$

Dans ce cas, les racines existant, la quantité placée sous le radical est positive, et on a :

$$0 < \frac{4ac}{b^2} < 1.$$

Nous pouvons donc poser :

$$(3) \qquad \sin^2 \varphi = \frac{4ac}{b^2}$$

et l'angle φ est calculable par logarithmes, lorsqu'on connaît les

(1) Voir le n° 87 de mes *Leçons d'Algèbre élémentaire*.

logarithmes des valeurs absolues de a, b, c. Les deux racines x' et x'' sont donc données par les formules :

$$x' = -\frac{b}{2a}\left[1 + \cos\varphi\right],$$
$$x'' = -\frac{b}{2a}\left[1 - \cos\varphi\right].$$

Or, d'après les formules [**44**] et [**45**], on a

$$1 + \cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2},$$
$$1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

On a donc, finalement,

$$(4)\qquad \begin{cases} x' = -\dfrac{b}{a}\cos^2\dfrac{\varphi}{2}, \\ x'' = -\dfrac{b}{a}\sin^2\dfrac{\varphi}{2}. \end{cases}$$

Ces formules sont calculables par logarithmes. En désignant, comme d'ordinaire, par $|\alpha|$ la valeur absolue de α, on a :

$$(4)^{bis}\qquad \begin{cases} \log|x'| = \log|b| + \operatorname{colog}|a| + 2\log\cos\dfrac{\varphi}{2}, \\ \log|x''| = \log|b| + \operatorname{colog}|a| + 2\log\sin\dfrac{\varphi}{2}. \end{cases}$$

2° *Les deux racines de l'équation sont de signes contraires.* — On a donc :

$$ac < 0.$$

La quantité $-\frac{4ac}{b^2}$ est positive et nous pouvons poser

$$(5)\qquad \operatorname{tg}^2\varphi = -\frac{4ac}{b^2};$$

l'angle φ est calculable par logarithmes.

Les deux racines x' et x'' sont, alors,

$$x' = -\frac{b}{2a}\left[1 + \frac{1}{\cos\varphi}\right] = -\frac{b}{2a}\cdot\frac{\cos\varphi + 1}{\cos\varphi},$$
$$x'' = -\frac{b}{2a}\left[1 - \frac{1}{\cos\varphi}\right] = \frac{b}{2a}\cdot\frac{1 - \cos\varphi}{\cos\varphi}.$$

En vertu des formules rappelées plus haut, on a donc :

$$(6)\quad \begin{cases} x' = -\dfrac{b\cos^2\dfrac{\varphi}{2}}{a\cos\varphi}, \\ x'' = \dfrac{b\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}{a\cos\varphi}. \end{cases}$$

Ces formules mettent bien en évidence que les deux racines x' et x'' sont de signes contraires. Elles donnent :

$$(6)^{bis}\quad \begin{cases} \log|x'| = \log|b| + \operatorname{colog}|a| + 2\log\cos\dfrac{\varphi}{2} + \operatorname{colog}\cos\varphi, \\ \log|x''| = \log|b| + \operatorname{colog}|a| + 2\log\sin\dfrac{\varphi}{2} + \operatorname{colog}\cos\varphi. \end{cases}$$

Le problème est ainsi résolu dans tous les cas.

On peut remarquer que dans le cas d'une racine double,

$$b^2 - 4ac = 0,$$

le problème est tout résolu, car on a :

$$x' = x'' = -\frac{b}{2a}.$$

Exemple [1]. — *Résoudre l'équation du second degré*

$$x^2 + \alpha x + \beta = 0,$$

α et β *étant deux nombres positifs tels que*

$$\log\alpha = 1,6537012,$$
$$\log\beta = 1,8759135.$$

(1) Je suppose, évidemment, le lecteur familiarisé avec les calculs logarithmiques ordinaires. — Voir, à ce sujet, le n° 143 de mes *Leçons d'Algèbre*.

On peut d'abord remarquer que les racines existent, car on a :

$$2\,log\,\alpha > log\,\beta + log\,4$$

donc

$$log\,\alpha^2 > log\,4\,\beta$$

et

$$\alpha^2 > 4\,\beta.$$

Elles sont, de plus, négatives, puisque leur produit β est positif et la somme $-\alpha$ négative.

Nous sommes donc dans le premier cas, où

$$a = 1, \qquad b = \alpha, \qquad c = \beta;$$

et nous aurons à appliquer les formules suivantes :

$$log\,\sin\varphi = \frac{1}{2}\,[log\,4 + log\,\beta + 2\,colog\,\alpha],$$

ce qui donnera φ. Ayant calculé φ, on aura :

$$log\,|\,x'\,| = log\,\alpha + 2\,log\,\cos\frac{\varphi}{2},$$

$$log\,|\,x''\,| = log\,\alpha + 2\,log\,\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Voici comment nous disposerons les calculs :

1° *Calcul de* φ.

$log\,4 =$	0,6020599		
$log\,\beta =$	$\bar{1}$,8759135		
$2\,colog\,\alpha =$	$\bar{4}$,6925976		
$2\,log\,\sin\varphi =$	$\bar{1}$,1705710		
$log\,\sin\varphi =$	$\bar{1}$,5852855		
pour	$\bar{1}$,5852716	22° 38′ 0″	$\Delta = 505.$
diff. =	139		
pour...........	101	2″	
diff. =	38		
pour...........	35,35	0″,7	
diff. =	2,65		
pour...........	2,52	0″05	
$\varphi =$		22° 38′ 2″,75,	
$\frac{\varphi}{2} =$		11° 19′ 1″,37.	

2° *Calcul de log* $\cos \frac{\varphi}{2}$.

pour	11° 19′ 10″	$\bar{1}$,9914689	$\Delta = 42$.
pour	— 8″	33,6	
pour	— 0″,6	2,52	
pour	— 0″,03	0,126	

$$\log \cos \frac{\varphi}{2} = \bar{1},9914725.$$

3° *Calcul de log* $\sin \frac{\varphi}{2}$.

pour	11° 19′ 0″	$\bar{1}$,2927685	$\Delta = 1052$.
pour	1″	105,2	
pour	0″,3	31,56	
pour	0″,07	7,364	

$$\log \sin \frac{\varphi}{2} = \bar{1},2927829.$$

4° *Calcul de* $\mid x' \mid$.

$$\log \alpha = 1,6537012$$
$$2 \log \cos \frac{\varphi}{2} = \bar{1},9829450$$

$\log \mid x' \mid$	= 1,6366462		
pour	6366383	43315	$\Delta = 100$.
diff. =	79		
pour	79	0,79	

$$\mid x' \mid = 43,31579.$$

5° *Calcul de* $\mid x'' \mid$.

$$\log \alpha = 1,6537012$$
$$2 \log \sin \frac{\varphi}{2} = \bar{2},5855658$$

$\log \mid x'' \mid$	= 0,2392670		
pour	2392494	17348	$\Delta = 250$.
diff. =	176		
pour	175	0,70	

$$\mid x'' \mid = 1,734870.$$

En résumé, les deux racines étant négatives, on a :

$$\begin{cases} x' = -43{,}31579, \\ x'' = -1{,}73487, \end{cases}$$

en prenant le même nombre de chiffres décimaux pour les deux racines. Comme vérification, on peut s'assurer que

$$log\ |\ x'\ | + log\ |\ x''\ | = log\ \beta;$$

on trouve :

$$log\ |\ x'\ | + log\ |\ x''\ | = 1{,}8759132.$$

Deuxième méthode. — La méthode précédente est l'application *directe* des procédés généraux que nous avons exposés. Elle donne lieu, quelquefois, à des calculs assez longs. En voici une autre qui, souvent, surtout dans le cas où les deux racines sont de signes contraires, conduit à des calculs plus simples.

x' et x'' étant les deux racines de l'équation (1), on a, comme on sait,

$$x' + x'' = -\frac{b}{a}, \tag{7}$$

$$x'x'' = \frac{c}{a}. \tag{8}$$

Pour résoudre l'équation (1), il suffit donc de trouver deux nombres x' et x'' vérifiant ces deux relations.

Distinguons, à cet effet, deux cas :

1° $\frac{c}{a} > 0$, *les deux racines sont de même signe*. — Posons :

$$x' = \varepsilon\sqrt{\frac{c}{a}}\,\text{tg}\,\varphi, \qquad x'' = \varepsilon\sqrt{\frac{c}{a}}\,\text{cotg}\,\varphi, \tag{9}$$

ε étant égal à $+1$ ou à -1, suivant que $-\frac{b}{a}$ est positif ou négatif.

La relation (8) sera vérifiée quel que soit φ ; il suffit donc de choisir l'angle auxiliaire φ de façon à satisfaire la relation (7). Nous devrons donc avoir :

$$\varepsilon\sqrt{\frac{c}{a}}(\text{tg}\,\varphi + \text{cotg}\,\varphi) = -\frac{b}{a},$$

ou

$$\sqrt{\frac{c}{a}}\,\frac{1}{\sin\varphi\cos\varphi} = \left|\frac{b}{a}\right|.$$

On en tire :

$$(10) \qquad \sin 2\varphi = 2\,\frac{\sqrt{ac}}{|\,b\,|},$$

formule qui est calculable par logarithmes.

On calculera φ par cette formule ; φ étant connu, les formules (9) donnent :

$$\log|\,x'\,| = \frac{1}{2}\log|\,c\,| + \frac{1}{2}\operatorname{colog}|\,a\,| + \log\operatorname{tg}\varphi,$$

$$\log|\,x''\,| = \frac{1}{2}\log|\,c\,| + \frac{1}{2}\operatorname{colog}|\,a\,| + \operatorname{colog}\operatorname{tg}\varphi.$$

Il faut remarquer que la formule (10) donnera toujours pour $\sin 2\varphi$ une valeur acceptable, car, puisque les racines existent par hypothèse, on a

$$4\,ac < b^2,$$

d'où

$$\frac{4\,ac}{b^2} < 1,$$

ce qui exprime que le carré de la valeur de $\sin 2\varphi$ est plus petit que 1.

2° $\frac{c}{a} < 0$, *les deux racines sont de signes contraires.* — Désignons par x' celle des deux racines qui est la plus petite en valeur absolue ; elle sera d'un signe contraire à celui de $-\frac{b}{a}$. Si donc nous désignons par ε un nombre égal à $+1$ ou à -1, suivant que $-\frac{b}{a}$ est positif ou négatif, nous satisferons la relation (8) en posant :

$$(11) \qquad x' = -\,\varepsilon\sqrt{-\frac{c}{a}}\operatorname{tg}\varphi, \qquad x'' = \varepsilon\sqrt{-\frac{c}{a}}\operatorname{cotg}\varphi.$$

Choisissons, ensuite, φ de façon à vérifier la relation (7) et nous devons avoir :

$$-\varepsilon\sqrt{-\frac{c}{a}}\,(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{cotg}\varphi) = -\frac{b}{a}.$$

ou

$$\varepsilon\sqrt{-\frac{c}{a}}\,\frac{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}{\cos\varphi\,\sin\varphi} = -\frac{b}{a}.$$

On en tire :

$$(12) \qquad \operatorname{tg} 2\varphi = 2\,\frac{\sqrt{-ac}}{|\,b\,|},$$

formule calculable par logarithmes. On calculera φ par cette formule qui est toujours acceptable ; puis, φ étant connu, les égalités (11) donnent :

$$\log|\,x'\,| = \frac{1}{2}\log|\,c\,| + \frac{1}{2}\operatorname{colog}|\,a\,| + \log\operatorname{tg}\varphi,$$
$$\log|\,x''\,| = \frac{1}{2}\log|\,c\,| + \frac{1}{2}\operatorname{colog}|\,a\,| + \operatorname{colog}\operatorname{tg}\varphi.$$

EXERCICES

38. Rendre calculables par logarithmes les expressions :

$$1 + \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\sin^2 a + \sin^2 b - \sin^2(a+b),$$
$$\sin^2(a-b) + \sin^2(b-c) + \sin^2(c-a),$$
$$\sqrt{a^4 + b^4}.$$

39. Calculer x, sachant que l'on a :

$$x = \sqrt{\sin^2\alpha\,\sin^2\beta - \cos^2\alpha\,\cos^2\beta},$$
$$\alpha = 51°\,47'\,23'',17, \qquad \beta = 97°\,15'\,7'',36.$$

(*Saint-Cyr*, 1880.)

40. Calculer l'angle x, sachant que :

$$\sin x = \sin a + \sin(a+r) + \sin(a+2r),$$

où

$$a = 18°\,25'\,37'', \qquad r = 7°\,17'\,26''.$$

(*Saint-Cyr*, 1887.)

41. Calculer les valeurs de x comprises entre 0° et 180° qui satisfont l'équation :

$$b \operatorname{tg} 3x = a + \sqrt{a^2 + b^2},$$

où

$$a = 42587,8, \qquad b = 36723,7.$$

(*Saint-Cyr*, 1886.)

42. Calculer la surface S donnée par la formule :

$$S = 2\pi R^2 (\cos\varphi - \sin\varphi),$$

dans laquelle

$$R = 79^{m},575, \qquad \varphi = 23^\circ\, 27'\, 22''$$

(S représente la surface de la zone tempérée à l'échelle de la carte de France).

(*Saint-Cyr*, 1878.)

43. Calculer les arcs x compris entre 0° et 180° qui vérifient l'équation :

$$5\cos^2 x - 3\cos x - 1 = 0$$

(*Saint-Cyr*, 1873.)

44. Résoudre trigonométriquement l'équation du second degré :

$$x^2 + px + q = 0\,;$$

sachant que :

1° $p = 4251,37, \qquad q = -3213,41\,;$
2° $p = -35,2373 \qquad q = 189,4375\,;$
3° $\log p = 3,4612375 \qquad \log q = 5,7152307.$

On appliquera les deux méthodes.

45. Évaluer le plus petit arc positif vérifiant l'une des équations suivantes :

$$\operatorname{tg} 2x = 7 \operatorname{tg} x,$$
$$8\cot^2 x - \sec^2 x = 1,$$
$$2\operatorname{tg} x = 7 \sin x.$$

CHAPITRE V

ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES A UNE INCONNUE

126. Généralités. — On appelle *équation trigonométrique* une égalité qui contient des lignes trigonométriques de certains arcs ou angles et qui n'est vérifiée que si on attribue à ces arcs ou angles des valeurs convenablement choisies appelées *solutions*.

En général, une équation trigonométrique à une inconnue admet une *infinité* de solutions; mais ces solutions se composent d'un nombre *limité* de groupes de solutions toutes congrues entre elles. Une équation trigonométrique est donc résolue dès qu'on a trouvé les solutions, en nombre fini, incongrues entre elles, telles que toutes les autres soient congrues à celles-ci.

Pour résoudre une équation trigonométrique, on peut employer la méthode générale suivante :

On exprime toutes les lignes trigonométriques inconnues au moyen d'une seule. On a, alors, une équation ordinaire à une inconnue que l'on résout. Connaissant les valeurs de cette ligne trigonométrique, prise pour inconnue, les tables permettent de calculer les angles correspondants.

Étant donnée une équation trigonométrique contenant les lignes trigonométriques d'un angle inconnu x :

1° On peut prendre pour inconnue l'une de ces lignes.

Par exemple, on prendra $\sin x$ pour inconnue. *En général*, ce procédé introduira des radicaux qu'il faudra faire disparaître. De plus, si l'inconnue est $\sin x$, il faudra, dans la discussion, ne prendre que les valeurs comprises entre -1 et $+1$.

2° On peut prendre pour inconnue $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Ce procédé aura l'avantage de ne jamais introduire de radicaux; car, comme nous l'avons vu (n° 89), toutes les lignes trigonométriques de l'angle x s'expriment *rationnellement* en fonction de $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

A côté de cette méthode générale, qui, quelquefois, peut conduire à des calculs très difficiles et même inextricables, il y a des méthodes spéciales qui dépendent de la forme de l'équation à

résoudre et qu'on ne peut enfermer dans une règle générale. On en aura une idée suffisante dans les exemples qui vont suivre.

127. Problème. — *Résoudre l'équation*

$$(1) \qquad a \sin x + b \cos x = c.$$

Première méthode. — Prenons, d'abord, $\sin x$ pour inconnue. On a :

$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x},$$

et l'équation (1) s'écrit :

$$a \sin x \pm b \sqrt{1 - \sin^2 x} = c.$$

Isolons le radical et élevons au carré. Comme il y a un double signe devant le radical, nous n'introduirons aucune solution étrangère en $\sin x$. Nous obtenons :

$$b^2 (1 - \sin^2 x) = c^2 - 2 ac \sin x + a^2 \sin^2 x.$$

Ceci donne une équation du second degré en $\sin x$.

$$(2) \quad (a^2 + b^2) \sin^2 x - 2 ac \sin x + c^2 - b^2 = 0.$$

Discussion. — Pour que l'équation ait des solutions, il faut qu'elle ait des racines et, de plus, qu'il y en ait au moins une qui soit comprise entre -1 et $+1$, puisque l'inconnue est un sinus.

Pour que les racines existent il faut que l'on ait :

$$a^2c^2 - (a^2 + b^2)(c^2 - b^2) \geqslant 0$$

ou

$$b^2 (a^2 + b^2 - c^2) \geqslant 0.$$

Comme b^2 est positif, on peut diviser par b^2 et la condition s'écrit :

$$(3) \qquad a^2 + b^2 \geqslant c^2.$$

Cette condition étant satisfaite, il est facile de vérifier que les deux racines seront comprises entre -1 et $+1$; car l'équation en $\sin x$ s'écrit :

$$b^2 (1 - \sin^2 x) = (c - a \sin x)^2,$$

ce qui prouve que, pour toute racine, $\sin x$, de cette équation, $1 - \sin^2 x$ est positif et, par suite, $\sin^2 x$ plus petit que 1.

La seule condition à remplir est donc la condition (3) et, alors, les *deux* racines de l'équation (2) en $\sin x$ sont acceptables.

Résolution. — Ceci posé, la condition (3) étant remplie, nous aurons, en résolvant l'équation (2),

$$\sin x = \frac{ac \pm b\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2}.$$

On commence par calculer deux angles α et β tels que l'on ait :

$$\sin \alpha = \frac{ac + b\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2},$$
$$\sin \beta = \frac{ac - b\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2}.$$

Ces angles α et β seront faciles à calculer au moyen des tables. En effet, si la valeur de $\sin\alpha$ est positive, la table donnera, immédiatement, un angle α, compris entre 0° et 90°, répondant à la question. Si la valeur de $\sin\alpha$ est négative, on calculera, par les tables, un angle α', compris entre 0° et 90°, ayant pour sinus la valeur absolue de $\sin \alpha$ et on aura une solution en prenant

$$\alpha = 180° + \alpha' \text{ (1)}.$$

On trouvera de même β.

Les angles α et β étant ainsi calculés, tous les angles x cherchés seront congrus soit à α, soit à $180° - \alpha$; soit à β, soit à $180° - \beta$. On aura donc les quatre groupes de solutions *de l'équation* (2)

$$(6) \qquad \begin{cases} x = 360\,k + \alpha, \\ x = 360\,k + 180 - \alpha, \\ x = 360\,k + \beta, \\ x = 360\,k + 180 - \beta; \end{cases}$$

où k est un entier positif, négatif ou nul. Il ne faudrait cependant pas croire que toutes ces solutions satisfont l'équation (1). S'il est vrai que nous n'avons pas introduit de solution étrangère *pour* $\sin x$, nous avons pu en introduire *pour l'angle* x. En effet, si on avait considéré l'équation

$$(1)^{bis} \qquad a \sin x - b \cos x = c,$$

(1) Nous supposons, ici, les angles mesurés en *degrés*. C'est ce que nous ferons, d'ailleurs, dans toute la suite de l'ouvrage.

on serait arrivé, en la traitant comme l'équation (1), à la même équation en $\sin x$ (2). Les solutions des équations (1) et $(1)^{bis}$ ont les mêmes sinus, mais il ne s'ensuit pas qu'elles sont les mêmes. Il faudra donc choisir, parmi les valeurs (6), celles qui vérifient l'équation (1). Ceci est facile. En effet, les deux angles α et $180° - \alpha$, ayant même sinus, mais des cosinus de signes contraires, l'un de ces deux angles vérifiera l'équation (1) et l'autre l'équation $(1)^{bis}$. Soit γ celui de ces deux angles qui satisfait l'équation (1). De même, des deux angles β et $180° - \beta$, il y en a un seul, que j'appelle δ, qui vérifie l'équation (1). Le choix des angles γ et δ étant ainsi fait, on a, finalement, les deux groupes de solutions suivants de l'équation (1) :

$$(7) \qquad \begin{cases} x = 360\,k + \gamma, \\ x = 360\,k + \delta. \end{cases}$$

Pour faire le calcul effectif, il faudra encore rendre les valeurs de $\sin\alpha$ et $\sin\beta$ calculables par logarithmes.

Deuxième méthode. — Prenons, en second lieu, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ comme inconnue. On a, comme on sait (n° 89),

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (1), elle devient :

$$2a\operatorname{tg}\frac{x}{2} + b\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right) = c\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right),$$

ou :

$$(8) \qquad (b+c)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - 2a\operatorname{tg}\frac{x}{2} + c - b = 0.$$

Discussion. — Pour qu'il y ait des solutions, il suffit que cette équation en $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ ait des racines. Il suffit donc que l'on ait :

$$a^2 - (c-b)(c+b) \geqslant 0,$$

et on retrouve la condition (3) précédente

$$a^2 + b^2 \geqslant c^2.$$

Résolution. — Cette condition étant remplie, on a deux valeurs pour $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, qui sont :

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b + c}.$$

On commencera par calculer deux angles γ' et δ' tels que l'on ait :

$$\operatorname{tg} \gamma' = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b + c},$$
$$\operatorname{tg} \delta' = \frac{a - \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b + c}.$$

Ces angles seront faciles à calculer au moyen des tables. Ainsi, si la valeur de $\operatorname{tg} \gamma'$ est positive, la table donnera de suite un angle γ', compris entre 0° et 90°, répondant à la question. Si la valeur de $\operatorname{tg} \gamma'$ est négative, la table donnera un angle γ'', compris entre 0° et 90°, tel que

$$\operatorname{tg} \gamma'' = - \operatorname{tg} \gamma'$$

et on pourra prendre

$$\gamma' = 180° - \gamma''.$$

De même pour le calcul de δ'. Les angles γ' et δ' étant ainsi calculés, on aura pour toutes les solutions :

$$\frac{x}{2} = 180\, k + \gamma',$$
$$\frac{x}{2} = 180\, k + \delta'.$$

On trouve, par suite, deux groupes de solutions :

$$\begin{cases} x = 360k + 2\gamma', \\ x = 360k + 2\delta'. \end{cases}$$

On retombe sur les deux groupes (7) trouvés plus haut.

Remarque. — Cette seconde méthode conduit, on le voit, à une discussion beaucoup plus simple que la précédente pour la double raison que, d'une part, la tangente peut prendre toutes les valeurs possibles et que, d'autre part, il n'y a pas eu d'élévation au carré, donc aucune introduction de solutions étrangères.

Troisième méthode. — Au point de vue du calcul pratique, les deux méthodes précédentes conduiraient à des calculs assez compliqués, car les formules de résolution exigeraient plusieurs angles auxiliaires, pour être rendues calculables par logarithmes.

Nous les avons exposées surtout pour donner des exemples de l'application de la méthode générale indiquée au début. La méthode suivante est beaucoup plus simple.

Divisons le premier membre de l'équation (1) par a. Elle s'écrit :

$$\sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a}.$$

Posons

$$(9) \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a},$$

ce qui est toujours permis puisque la tangente peut prendre *toutes* les valeurs possibles. L'équation prend la forme

$$\sin x + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cos x = \frac{c}{a},$$

ou

$$\sin x \cos \varphi + \sin \varphi \cos x = \frac{c}{a} \cos \varphi,$$

ou, enfin,

$$(10) \qquad \sin(x + \varphi) = \frac{c}{a} \cos \varphi.$$

Pour résoudre, on calculera donc d'abord l'angle φ donné par la formule (9). La formule (10) donnera alors $x + \varphi$ et, par suite, x.

Discussion. — Il faut que la valeur de $\sin(x + \varphi)$ donnée par l'équation (10) soit comprise entre -1 et $+1$. Pour cela, il suffit que son carré soit plus petit que 1. On doit donc avoir

$$\frac{c^2}{a^2} \cos^2 \varphi \leqslant 1.$$

Or, comme on a

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}, \quad \cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi},$$

on en conclut :

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{a^2}{a^2 + b^2}.$$

La condition précédente devient donc :

$$\frac{c^2}{a^2 + b^2} \leqslant 1$$

et on retrouve la condition (3)

$$c^2 \leqslant a^2 + b^2.$$

Résolution. — On calculera, d'abord, au moyen des tables, un angle α tel que

$$\sin \alpha = \frac{c}{a} \cos \varphi.$$

Cet angle α connu, on aura soit

$$x + \varphi = 360 k + \alpha,$$

soit

$$x + \varphi = 360 k + 180 - \alpha.$$

On retrouve donc les deux groupes de solutions :

$$\begin{cases} x = 360 k + \alpha - \varphi, \\ x = 360 k + 180 - \alpha - \varphi, \end{cases}$$

qui ont bien la forme (7).

Exemple. — *Soit à résoudre l'équation*

$$\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Nous l'écrivons, en suivant la troisième méthode,

$$\sin x + \operatorname{tg} 45^\circ \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

ou

$$\sin x \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 45^\circ.$$

Comme

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

le second membre est égal à $\frac{1}{2}$ et l'équation s'écrit :

$$\sin(45^\circ + x) = \frac{1}{2}.$$

Or, on a :

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

On a donc : soit

$$45^\circ + x = 360\,k^\circ + 30^\circ,$$

soit

$$45^\circ + x = 360\,k^\circ + 180^\circ - 30^\circ.$$

Ceci donne les deux groupes de solutions :

$$x = 360\,k^\circ - 15^\circ,$$
$$x = 360\,k^\circ + 105^\circ.$$

128. Problème. — *Résoudre l'équation*

$$(1) \qquad a \operatorname{tg} x + b \operatorname{cotg} x = c.$$

Prenons $\operatorname{tg} x$ comme inconnue. L'équation s'écrit, alors

$$a \operatorname{tg} x + \frac{b}{\operatorname{tg} x} = c,$$

ou

$$(2) \qquad a \operatorname{tg}^2 x - c \operatorname{tg} x + b = 0,$$

qui est une équation du second degré en $\operatorname{tg} x$.

Discussion. — Pour que l'équation (1) ait des solutions, il faut et il suffit que l'équation (2) admette des racines en $\operatorname{tg} x$. Il faut donc avoir :

$$(3) \qquad c^2 - 4ab \geqslant 0.$$

Ceci suffit, puisque la tangente peut prendre toutes les valeurs possibles.

Résolution. — La condition (3) étant remplie on a, pour $\operatorname{tg} x$, deux valeurs :

$$\operatorname{tg} x = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}.$$

Calculons, au moyen des tables, deux angles α et β tels que l'on ait :

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}, \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}. \end{aligned} \right.$$

Tous les angles x cherchés ayant même tangente que l'angle α ou que l'angle β, on a deux groupes de solutions :

$$\left\{ \begin{aligned} x &= 180k + \alpha, \\ x &= 180k + \beta. \end{aligned} \right.$$

Pour faire le calcul effectif, on rendra les formules (4) calculables par logarithmes et, pour cela, il suffira d'appliquer ce que nous avons dit (nº 125) pour l'équation générale du second degré.

129. — Les deux problèmes précédents nous ont fourni des exemples d'application de la méthode générale. Mais, déjà pour le premier, nous avons donné une méthode spéciale qui est plus simple. Le problème suivant nous en donnera un nouvel exemple.

Problème. — *Résoudre l'équation.*

$$(1) \qquad \sin px = \sin qx,$$

où p *et* q *sont deux nombres donnés.*

L'égalité (1) exprime que les deux angles px et qx ont même sinus. Il en résulte que l'un d'eux, px par exemple, est soit congru à l'autre qx, soit congru au supplément de cet autre (nº 47). Tous les angles x cherchés vérifient donc l'une ou l'autre des deux égalités suivantes :

$$px = 360k + qx,$$

ou

$$px = 360k + 180 - qx.$$

Si p est différent de q, on a deux groupes de solutions :

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{360k}{p - q}, \\ x &= \frac{360k + 180}{p + q}. \end{aligned} \right.$$

Si $p = q$, la première relation ne donne plus de solution, car elle

ne peut avoir lieu que pour $k = 0$ et il n'y a plus qu'un groupe de solutions :

$$x = \frac{360k + 180}{2p} = \frac{180k + 90}{p}.$$

REMARQUE I. — On traiterait de la même façon les équations

$$\cos px = \cos qx,$$
$$\operatorname{tg} px = \operatorname{tg} qx.$$

L'équation

$$\cos px = \sin qx$$

prendrait la forme (1) en l'écrivant :

$$\sin (90 - px) = \sin qx;$$

et, par suite, se résoudrait par le même procédé.

REMARQUE II. — Lorsque p et q sont entiers, on peut appliquer la méthode générale. On peut, en effet, exprimer $\sin px$ et $\cos qx$ (n° 84) au moyen de $\sin x$ et on a, alors, une équation en $\sin x$. Mais, cette manière de procéder serait souvent fort compliquée. Cependant, en la rapprochant de la méthode précédente, on en tire des conclusions intéressantes, car on a ainsi des équations, de degrés élevés, en $\sin x$, dont on connaît d'avance les solutions.

Ainsi, considérons le système

$$(2) \qquad \sin 5x = \sin 3x.$$

On a (n° 84) :

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x.$$

On trouve de même, en appliquant la méthode du n° 84,

$$\sin 5x = 5 \sin x - 20 \sin^3 x + 16 \sin^5 x.$$

L'équation devient alors :

$$5 \sin x - 20 \sin^3 x + 16 \sin^5 x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x.$$

ou :

$$\sin x \left[16 \sin^4 x - 16 \sin^2 x + 2\right] = 0.$$

Les sinus des angles cherchés vérifient donc soit l'équation

$$(3) \qquad \sin x = 0,$$

soit

$$(4) \qquad 8 \sin^4 x - 8 \sin^2 x + 1 = 0.$$

D'autre part, la méthode que nous avons exposée nous apprend que toutes les solutions de l'équation (2) sont données par les deux égalités :

$$x = 180\,k^\circ,$$
$$x = \frac{360k^\circ + 180^\circ}{8} = 45\,k^\circ + \frac{45^\circ}{2}.$$

Le premier groupe correspond à l'équation (3) et le second groupe à l'équation (4). On en conclut que les quatre racines de l'équation (4) sont :

$$\sin\frac{1}{2}45^\circ,\quad \sin\frac{3}{2}45^\circ,\quad \sin\frac{5}{2}45^\circ \text{ et } \sin\frac{7}{2}45^\circ;$$

c'est-à-dire, en mesurant les angles avec les longueurs d'arcs,

$$\sin\frac{\pi}{8},\quad \sin\frac{3\pi}{8},\quad \sin\frac{5\pi}{8},\quad \sin\frac{7\pi}{8}.$$

Ce serait un moyen détourné d'avoir les valeurs de ces quatre sinus.

EXERCICES

46. Résoudre les équations :

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1,$$
$$\cos 3x + \sin 3x = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\sin x + 2\cos x = \text{séc}\, x,$$
$$\frac{\operatorname{tg}(x+a)}{\operatorname{tg}(x-a)} = m,$$
$$\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x) = \frac{1-2\cos 2a}{1+2\cos 2a},$$
$$\sin x = \sin 7x,$$
$$\sin 7x - \sin x = \sin 3x,$$
$$\cos 3x = \sin 5x,$$
$$\cos 3x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x},$$
$$\left[\sqrt{1+\sin x} - 1\right]\left[\sqrt{1-\sin x} + 1\right] = \operatorname{tg}\frac{1}{2}a\sin x,$$
$$\cos\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$12 \cos^2 x = 5 \sin x,$$
$$\cot g\, x - \operatorname{tg} x = \sin x + \cos x,$$
$$\frac{a}{\sin x} + \frac{a}{\cos x} = b,$$
$$\sin x \operatorname{tg} x + 2 \cos x = m,$$
$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{2}{3},$$
$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4},$$
$$\sin 3x = m \sin x.$$

47. Résoudre et *discuter*, suivant les diverses valeurs de m, les équations suivantes :

$$\operatorname{tg}^2 x + \cos^2 x = m,$$
$$\cos x = m \operatorname{tg} x,$$
$$m \operatorname{tg}^4 x - 2(m-1) \operatorname{tg}^2 x + m - 2 = 0,$$

(*Saint-Cyr*),

$$m \cos^2 x + (2m^2 - m + 1) \sin x - 3m + 1 = 0,$$
$$\sin x + \cos x + \sin 2x = m,$$
$$\sin x \sin 3x = m,$$
$$\cos 3x = m \cos^3 x.$$

48. Résoudre les équations :

$$\sin a + \sin(a + x) + \sin(a + 2x) = 0,$$
$$\cos a + \cos(a + x) + \cos(a + 2x) = 0;$$

plus généralement, résoudre les équations :

$$\sin a + \sin(a + x) + \sin(a + 2x) + \ldots + \sin[a + (n-1)x] = 0,$$
$$\cos a + \cos(a + x) + \cos(a + 2x) + \ldots + \cos[a + (n-1)x] = 0,$$

où n est un nombre entier donné.

49. Résoudre, en se servant des tables trigonométriques, les équations numériques suivantes :

$$89524{,}67 \cos x + 24508{,}75 \sin x = 89785$$

(*Saint-Cyr*),

$$3 \operatorname{tg} x + 5 \cot g\, x = 14,$$
$$\sin \alpha \sin^2 x + \sin x \cos x + \cos \alpha \cos^2 x = 0$$

où

$$\alpha = 192^\circ\, 12'\, 43'',7.$$

CHAPITRE VI

ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES SIMULTANÉES

130. Généralités. — Étant données des équations simultanées contenant des angles inconnus, si ces équations ne contiennent que des lignes trigonométriques de ces angles et non ces angles eux-mêmes ou des lignes d'expressions composées avec ces angles, on pourra appliquer, sans modifications, les procédés indiqués au nº 126. On exprimera toutes les lignes de chaque angle au moyen de l'une d'elles et on aura ainsi un système ordinaire d'équations simultanées.

Ainsi, par exemple, si on a un système de deux équations contenant les lignes trigonométriques de deux angles inconnus x et y, on pourra exprimer ces lignes en fonction de $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ et $\operatorname{tg}\frac{y}{2}$ et on aura ainsi un système ordinaire d'équations où les deux inconnues seront $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ et $\operatorname{tg}\frac{y}{2}$.

Certains systèmes qui, au premier abord, ne paraissent pas rentrer dans ce type, s'y ramènent par des transformations faciles. Ainsi, si, dans l'une des équations, figure $\cos(x+y)$, il suffira de développer cette expression et de la remplacer par

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y$$

pour que les lignes des arcs x et y séparés apparaissent.

131. Problème. — *Résoudre le système des deux équations :*

$$(1) \qquad \begin{cases} a \operatorname{tg} x + b \operatorname{tg} y = c, \\ a' \operatorname{cotg} x + b' \operatorname{cotg} y = c'. \end{cases}$$

Posons :

$$\operatorname{tg} x = \mathrm{X}, \quad \operatorname{tg} y = \mathrm{Y}$$

et le système (1) devient :

$$(2) \qquad \begin{cases} a\mathrm{X} + b\mathrm{Y} = c, \\ \dfrac{a'}{\mathrm{X}} + \dfrac{b'}{\mathrm{Y}} = c'. \end{cases}$$

De la première on tire :

$$(3) \qquad Y = \frac{c - aX}{b}$$

et, en portant dans la seconde, on trouve, après avoir chassé les dénominateurs et simplifié,

$$(4) \qquad ac'X^2 + (bb' - aa' - cc')X + a'c = 0.$$

Discussion. — Pour que le système (1) admette des solutions, il faut et il suffit que l'équation (4) ait des solutions. Il faut donc avoir

$$(bb' - aa' - cc')^2 - 4aa'cc' \geqslant 0,$$

c'est-à-dire

$$(5) \quad a^2a'^2 + b^2b'^2 + c^2c'^2 - 2bb'cc' - 2cc'aa' - 2aa'bb' \geqslant 0.$$

Si cette condition (5) est remplie, l'équation (4) admet deux solutions X' et X'' auxquelles correspondent deux valeurs Y' et Y'', pour Y, données par l'équation (3).

On a, alors, toutes les solutions du problème en associant les valeurs d'x et d'y qui vérifient soit le système

$$\operatorname{tg} x = X', \quad \operatorname{tg} y = Y';$$

soit

$$\operatorname{tg} x = X'', \quad \operatorname{tg} y = Y''.$$

132. Remarque. — La méthode précédente, quoiqu'applicable *en principe* à tout système qui ne contient que les lignes des angles inconnus séparés, conduit souvent à des calculs très difficiles et quelquefois inextricables.

Il faudra, alors, chercher une modification du système qui le présente sous une forme plus commode. Cette modification n'est, en général, qu'un pur artifice et on ne peut guère indiquer de règle générale à ce sujet.

Voici un exemple de ce type.

Problème. — *Résoudre le système :*

$$(1) \qquad \begin{cases} \cos x + \cos y = a, \\ \sin x + \sin y = b. \end{cases}$$

Si on applique à ce système la méthode indiquée plus haut, en

prenant, par exemple, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ et $\operatorname{tg}\frac{y}{2}$ pour inconnues auxiliaires, on parvient à deux systèmes fort compliqués dont la résolution dépend de celle d'une équation du 4[e] degré.

Voici, alors, comment on peut diriger les calculs :

Écrivons les deux équations (1) sous la forme suivante :

$$(2) \qquad \begin{cases} 2\cos\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} = a, \\ 2\cos\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2} = b. \end{cases}$$

Divisons-les, membre à membre, et nous aurons :

$$(3) \qquad \operatorname{tg}\frac{x+y}{2} = \frac{a}{b}.$$

Cette équation donne $\frac{x+y}{2}$. Connaissant $\frac{x+y}{2}$, l'une des deux équations (2) donnera $\frac{x-y}{2}$. On aura, par exemple,

$$(4) \qquad \cos\frac{x-y}{2} = \frac{a}{2\cos\frac{x+y}{2}}.$$

Discussion. — La valeur (3) de $\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}$ est toujours acceptable. Pour que celle de $\cos\frac{x-y}{2}$, donnée par la formule (4), le soit, il faut que l'on ait :

$$\frac{a^2}{4\cos^2\frac{x+y}{2}} \leqslant 1.$$

Or, en vertu de l'équation (3),

$$\frac{1}{\cos^2\frac{x+y}{2}} = 1 + \operatorname{tg}^2\frac{x+y}{2} = \frac{a^2+b^2}{a^2}.$$

On doit donc avoir, finalement,

$$(5) \qquad \frac{a^2+b^2}{4} \leqslant 1.$$

Résolution. — Cette condition étant remplie, soit α un angle tel que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a};$$

on devra avoir

$$(6) \qquad \frac{x+y}{2} = \alpha + 180k.$$

On en conclut :

$$\cos\frac{x-y}{2} = (-1)^k \frac{a}{2\cos\alpha}.$$

Soit β un angle tel que

$$\cos\beta = \frac{a}{2\cos\alpha},$$

on aura :

$$(7) \qquad \frac{x-y}{2} = 360h + 180k \pm \beta,$$

h et k étant des entiers positifs, négatifs ou nuls.

Des formules (6) et (7) on tire, enfin, les valeurs suivantes d'x et d'y :

$$\begin{cases} x = 360\,(h+k) \pm \beta + \alpha, \\ y = -\,360\,h \mp \beta + \alpha. \end{cases}$$

h et k étant deux entiers arbitraires, ces deux formules peuvent s'écrire, plus simplement,

$$\begin{cases} x = 360p \pm \beta + \alpha, \\ y = 360\,q \mp \beta + \alpha, \end{cases}$$

dans lesquelles les signes supérieurs et inférieurs qui précèdent β se correspondent et p et q désignent des entiers positifs, négatifs ou nuls.

Remarque. — Il arrive fréquemment qu'on rencontre des systèmes, tels que le système (1) précédent, symétriques en x et en y. Il y a, la plupart du temps, avantage, pour les résoudre, à procéder comme nous l'avons fait et à chercher à calculer $x + y$ et $x - y$.

133. Cas où les inconnues elles-mêmes figurent dans les équations. — Lorsque les inconnues figurent dans les équations, non seulement par leurs lignes trigonométriques, mais encore elles-mêmes, on ne peut plus indiquer de procédé général de résolution. Tout dépend alors de l'ingéniosité du calculateur.

Le cas le plus fréquent, celui du moins qui se rencontre le plus souvent dans les résolutions de triangles, est celui où il s'agit de *calculer deux angles connaissant leur somme ou leur différence et une relation entre leurs lignes trigonométriques*. Ce cas se ramène immédiatement au cas d'une équation à une seule inconnue du n° 126.

Supposons, par exemple, qu'on connaisse la somme $x + y$ des deux angles inconnus :

$$x + y = a.$$

On cherchera à calculer $x - y$ ou $\frac{x - y}{2}$. Nous poserons

$$x - y = z$$

et nous aurons :

$$x = \frac{a + z}{2}, \qquad y = \frac{a - z}{2}.$$

En portant ces valeurs dans la relation trigonométrique donnée, on n'aura plus qu'une équation à une inconnue z.

De même, si on connaissait $x - y$, on calculerait $x + y$.

Nous nous bornerons à traiter des exemples de ce type.

134. Problème. — *Résoudre le système :*

$$(1) \qquad \begin{cases} x + y = a, \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = \dfrac{m}{p}. \end{cases}$$

Proposons-nous de calculer $\frac{x - y}{2}$.

La seconde équation s'écrit :

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{m - p}{m + p}.$$

Or, en rendant le premier membre calculable par logarithmes, on a, d'après la formule [**51**] (n° 93),

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\operatorname{tg} \frac{x-y}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x+y}{2}};$$

et cette équation s'écrit, enfin,

$$\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \frac{m-p}{m+p} \operatorname{tg} \frac{x+y}{2}.$$

Le système (1) s'écrit, par suite,

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{x+y}{2} = \frac{a}{2}, \\ & \operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \frac{m-p}{m+p} \operatorname{tg} \frac{a}{2}. \end{aligned} \right.$$

On connaît donc $\frac{x-y}{2}$ et $\frac{x+y}{2}$ ce qui donne x et y.

Comme la tangente peut prendre toutes les valeurs possibles, le système admet toujours des solutions. Soit α un angle tel que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m-p}{m+p} \operatorname{tg} \frac{a}{2};$$

on aura :

$$\frac{x-y}{2} = \alpha + 180 k.$$

Et, par suite, toutes les solutions sont données par les formules

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{a}{2} + \alpha + 180 k, \\ y &= \frac{a}{2} - \alpha - 180 k, \end{aligned} \right. \quad (\textit{degrés})$$

où k désigne un entier positif, négatif ou nul.

135. Problème. — *Résoudre le système :*

$$(1) \qquad \begin{cases} x - y = a, \\ \cos x \cos y = b. \end{cases}$$

Nous calculerons, ici, $x + y$. Or, on a, d'après les formules [**49**],

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos (x + y) + \cos (x - y)].$$

La seconde équation (1) s'écrit donc :

$$\cos (x + y) + \cos (x - y) = 2b\,;$$

et, en tenant compte de la première,

$$(2) \qquad \cos (x + y) = 2b - \cos a.$$

Cette équation fournit donc $x + y$.

Discussion. — Pour que le système admette des solutions, il faut que la valeur (2) trouvée pour $\cos (x + y)$ soit plus petite que 1, en valeur absolue, c'est-à-dire que le carré de cette valeur soit plus petit que 1. On doit donc avoir :

$$(3) \qquad (2b - \cos a)^2 \leqslant 1.$$

Cette condition (3) étant remplie, l'équation (2) fournit pour $x + y$ des valeurs comprises dans une formule de la forme :

$$x + y = 360\,k \pm \alpha \ (\textit{degrés}).$$

On a donc :

$$\begin{cases} x = \dfrac{a \pm \alpha}{2} + 180\,k, \\ y = \dfrac{-a \pm \alpha}{2} + 180\,k, \end{cases} \quad (\textit{degrés})$$

où k désigne un entier positif, négatif ou nul, et où les signes supérieurs et inférieurs qui précèdent α se correspondent dans les deux formules.

EXERCICES

50. Résoudre les systèmes suivants :

$$x + y = a, \quad \sin x + \cos y = b;$$
$$x + y = a, \quad \sin x \sin y = b;$$
$$x + y = a, \quad \sin x + \sin y = \sin x \sin y,$$

(*voir l'exercice* 32);

$$x + y = a, \quad \sin x \sin y = m \cos^2 x.$$

Résoudre les mêmes systèmes où on remplace l'équation $x + y = a$ par $x - y = a$.

51. Résoudre les systèmes :

$$\sin x + \sin y = a, \quad \sin x \sin y = b;$$
$$\frac{\sin x}{a} = \frac{\sin y}{b} = \frac{\sin (x + y)}{c};$$
$$\frac{\operatorname{tg} x}{a} = \frac{\operatorname{tg} y}{b} = \frac{\operatorname{tg} (x + y)}{c};$$
$$\sin x = m \cos y, \quad \operatorname{tg}^2 x = m \operatorname{tg} y;$$
$$\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} y = a, \quad \operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} y = b.$$

LIVRE III

RÉSOLUTION DES TRIANGLES

CHAPITRE PREMIER

TRIANGLES RECTANGLES

136. Notation. — Nous désignerons toujours, dans la suite, un triangle par les trois lettres A, B, C placées aux trois sommets. Les trois angles, *mesurés en degrés*, seront désignés par A, B, C et les longueurs des trois côtés par a, b, c, a étant le côté opposé à l'angle A, b étant opposé à B et c à C.

Lorsque le triangle sera rectangle, *nous placerons toujours la lettre* A *au sommet de l'angle droit*, de telle sorte que l'on aura

$$A = 90^\circ$$

et que les deux angles B et C seront complémentaires,

$$B + C = 90^\circ.$$

Un triangle rectangle n'a donc que cinq éléments variables : a, b, c, B, C. Il existe entre ces éléments, pris trois à trois, des relations que nous allons d'abord établir.

137. Théorème. — *Dans un triangle rectangle, un côté de l'angle droit est égal au produit de l'hypoténuse par le cosinus de l'angle aigu adjacent ou par le sinus de l'angle aigu opposé.*

Soit le triangle rectangle ABC (*fig.* 37), rectangle en A. Prenons, sur CA et CB, des sens positifs de C vers A et de C vers B. On aura, alors,

$$\overline{CA} = b, \qquad \overline{CB} = a.$$

Or, $\overline{CA}$ est la projection orthogonale de $\overline{CB}$ sur l'axe CA, on a donc, d'après le théorème du numéro 44,

$$\overline{CA} = \overline{CB} \cdot \cos(\widehat{CA, CB})$$

et, par suite,

$$(1) \qquad b = a \cos C.$$

On prouverait, de même, que

$$(2) \qquad c = a \cos B.$$

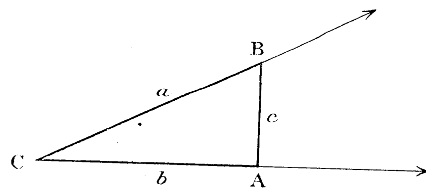


Fig. 37.

Les angles B et C étant complémentaires, on a

$$\cos C = \sin B,$$
$$\cos B = \sin C.$$

Les relations (1) et (2) deviennent donc :

$$(3) \quad b = a \sin B,$$
$$(4) \quad c = a \sin C.$$

Des formules (1), (2), (3), (4), résulte l'exactitude de l'énoncé.

138. Théorème. — *Dans tout triangle rectangle, un côté de l'angle droit est égal au produit de l'autre côté par la tangente de l'angle aigu opposé ou par la cotangente de l'angle aigu adjacent.*

On a, en effet, d'après le théorème précédent :

$$b = a \sin B,$$
$$c = a \cos B.$$

Ce qui donne, en divisant membre à membre,

$$\frac{b}{c} = \operatorname{tg} B = \frac{1}{\operatorname{cotg} B}.$$

On en tire :

$$\begin{cases} b = c \operatorname{tg} B, \\ c = b \operatorname{cotg} B. \end{cases}$$

En divisant de même, membre à membre, les égalités

$$c = a \sin C,$$
$$b = a \cos C,$$

on trouve :

$$\begin{cases} b = c \operatorname{cotg} C, \\ c = b \operatorname{tg} C. \end{cases}$$

139. Résumé. — Des deux théorèmes précédents, il résulte qu'il existe, entre les cinq éléments a, b, c, B, C d'un triangle rectangle (a étant l'hypoténuse), les relations suivantes :

$$B + C = 90^\circ,$$

$$[55] \quad \begin{cases} b = a \cos C, \\ c = a \cos B; \end{cases}$$

$$[56] \quad \begin{cases} b = a \sin B, \\ c = a \sin C; \end{cases}$$

$$[57] \quad \begin{cases} b = c \operatorname{tg} B, \\ c = b \operatorname{tg} C; \end{cases}$$

auxquelles on peut ajouter la relation de Pythagore

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

On a, ainsi, huit formules et il est facile de se rendre compte qu'on a toutes celles qui contiennent trois éléments quelconques, pris au hasard. En effet, une telle relation peut contenir d'abord les trois côtés, c'est la relation de Pythagore. Puis, elle peut contenir deux des côtés a, b ou c et l'un des angles B ou C; il n'y a que six combinaisons possibles qui correspondent aux six formules [**55**], [**56**] et [**57**]. Enfin, il ne peut exister une relation ne contenant qu'un côté et les angles B et C et où figure *effectivement* le côté; car, s'il en était ainsi, on pourrait calculer les côtés d'un triangle rectangle connaissant uniquement les angles et deux triangles rectangles semblables seraient égaux. En d'autres termes, si l'on cherche une relation entre un côté et les deux angles B et C, le côté ne devra pas figurer dans la relation qui, par suite, devra être équivalente à l'égalité

$$B + C = 90^\circ.$$

140. Résolution des triangles rectangles. — Résoudre un triangle rectangle, c'est calculer les cinq éléments de ce triangle connaissant deux données. Les cas les plus simples de résolution sont ceux où l'on donne deux des éléments du triangle; et, pour que le problème soit possible, il faut, évidemment, que, parmi ces données, il y ait au moins *un côté*. Les formules résumées au n° 139 fournissent, alors, dans tous les cas, la solution du problème. Ces égalités sont, en effet, toutes celles qui peuvent exister entre trois éléments du triangle; donc, étant donnés deux éléments dont au

moins un côté, il y a une de ces formules qui contient ces deux éléments et un troisième, inconnu.

Il peut se présenter quatre cas différents, suivant les éléments qui sont connus. En voici l'énumération.

On peut se donner :

1° *L'hypoténuse et un angle aigu.*

2° *Un côté de l'angle droit et un angle aigu.*

3° *L'hypoténuse et un côté de l'angle droit.*

4° *Les deux côtés de l'angle droit.*

Nous allons traiter, successivement, ces quatre problèmes.

Nous désignerons, comme toujours, par a, b, c, B, C, les cinq éléments du triangle rectangle, a étant l'hypoténuse.

141. Premier cas. — *Les données sont* a *et* B. — Les inconnues sont donc b, c, et C.

On a, de suite,

$$C = 90^\circ - B;$$

puis, les formules [**55**] et [**56**] donnent :

$$b = a \sin B,$$
$$c = a \cos B.$$

Le problème est toujours possible pourvu que B soit aigu.

Calculons encore la surface S du triangle; on a :

$$S = \frac{bc}{2} = \frac{a^2 \sin B \cos B}{2}.$$

Toutes les formules sont calculables par logarithmes.

142. Deuxième cas. — *Les données sont* b *et* B. — Les inconnues sont a, c et l'angle C.

On a, de suite,

$$C = 90^\circ - B;$$

puis, les formules [**56**] et [**57**] donnent a et c :

$$a = \frac{b}{\sin B},$$
$$c = b \operatorname{cotg} B.$$

La surface est :

$$S = \frac{bc}{2} = \frac{b^2 \operatorname{cotg} B}{2}.$$

Remarque. — Le cas où les données seraient b et C serait identique à celui-ci ; car dès qu'on connaît C, on a aussi B en prenant le complément.

143. Troisième cas. — *Les données sont* a *et* b. — Les inconnues sont : le côté c et les angles B et C.

On a, d'abord :

$$\sin B = \frac{b}{a};$$

ce qui donne l'angle B.

Connaissant B, on a :

$$C = 90° - B,$$
$$c = b \operatorname{cotg} B.$$

La surface est :

$$S = \frac{b^2 \operatorname{cotg} B}{2}.$$

Remarque. — Le calcul précédent sera surtout avantageux lorsqu'on connaît non pas a et b, mais *leurs logarithmes* ; car, alors, il n'exige que le calcul d'un seul logarithme, celui de *log cotg* B. Lorsqu'on donne a et b eux-mêmes, il faut calculer *trois* logarithmes ; ceux de a, b et cotg B. Dans ce dernier cas il y a, alors, avantage à employer les formules suivantes qui n'exigent que le calcul de deux logarithmes. D'après la relation de Pythagore on a :

$$c^2 = a^2 - b^2,$$

d'où

$$(1) \qquad c = \sqrt{(a-b)(a+b)}.$$

D'autre part, on a :

$$\cos C = \frac{b}{a}$$

et, par suite,

$$2 \cos^2 \frac{C}{2} = 1 + \cos C = \frac{a+b}{a},$$
$$2 \sin^2 \frac{C}{2} = 1 - \cos C = \frac{a-b}{a}.$$

On en conclut :

$$\mathrm{tg}^2 \frac{C}{2} = \frac{a-b}{a+b},$$

$$(2) \qquad \mathrm{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.$$

La formule (1) donne c, la formule (2) donne C et, connaissant C, on a

$$B = 90° - C.$$

Comme on le voit, ces formules n'exigent que les calculs de

$$log\,(a-b) \quad \text{et} \quad log\,(a+b).$$

Pour que le problème soit possible, il faut que a soit plus grand que b, ce qui était évident, *a priori*, puisque a est l'hypoténuse.

144. Quatrième cas. — *Les données sont* b *et* c. — Les inconnues sont, alors, l'hypoténuse a et les deux angles aigus B et C.

On a, d'abord,

$$\mathrm{tg}\,B = \frac{b}{c};$$

connaissant B, on a :

$$C = 90° - B,$$

$$a = \frac{b}{\sin B},$$

et

$$S = \frac{bc}{2}.$$

Ces formules sont calculables par logarithmes et le problème est toujours possible.

Remarque. — On aurait pu vouloir calculer a au moyen des données. Il aurait, alors, fallu recourir à la relation

$$a^2 = b^2 + c^2$$

qui donne

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Mais cette formule n'est pas calculable par logarithmes.

Il est d'ailleurs à remarquer que si on la rendait calculable par logarithmes, on retomberait sur le calcul précédent. Écrivons, en effet, a sous la forme :

$$a = b\sqrt{1 + \frac{c^2}{b^2}}.$$

Posons

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{c},$$

on aura :

$$a = b\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2\varphi} = \frac{b}{\sin\varphi}$$

En comparant ces formules aux précédentes, on voit que φ n'est autre chose que B.

145. Disposition pratique des calculs. — Pratiquement, pour faire les calculs d'une résolution de triangle, on les dispose de la façon suivante. On partage la feuille sur laquelle on fait les calculs, en deux parties. Dans la colonne de gauche on inscrit les *calculs auxiliaires*, c'est-à-dire les calculs des logarithmes de toutes les quantités qui figurent dans les seconds membres des formules. La colonne de droite est réservée aux *calculs définitifs*, c'est-à-dire aux calculs des inconnues.

Voici, pour chacun des cas précédents, un exemple numérique.

J'ai, volontairement, pris, dans ces exemples, le *même* triangle. Les résultats se contrôlent ainsi les uns les autres. Il sera bon de remarquer que les différences, lorsqu'elles existent, ne portent que sur le dernier chiffre décimal qui diffère d'*une* unité. Ces différences proviennent de ce que les approximations ne sont pas toujours dans le même sens.

Premier cas.

Données..... $\begin{cases} a = 3740{,}957, \\ B = 33^\circ\,18'\,52'',73. \end{cases}$ | **Inconnues**... $\begin{cases} C = 56^\circ\,41'\,7'',27, \\ b = 2054{,}670, \\ c = 3126{,}193. \end{cases}$

$$C = 90^\circ - B, \quad b = a \sin B, \quad c = a \cos B.$$

Calculs auxiliaires.

1° *Calcul de log* a.

pour 37409	5729761	$\Delta = 116.$
pour ... 0,5	58	
pour ... 0,07	8,1	

log $a = 3{,}5729827.$

2° *Calcul de log* sin B.

pour 33°18′50″	$\bar{1}$,7397506	$\Delta = 321.$
pour ...... 2″	64,2	
pour ...... 0″,7	22,47	
pour ...... 0″,03	0,963	

log sin B $= \bar{1}{,}7397594.$

3° *Calcul de log* cos B.

pour 33°19′ 0″	$\bar{1}$,9220232	$\Delta = 138.$
pour ... — 7″	96,6	
pour ... — 0″,2	2,76	
pour ... — 0″,07	0,966	

log cos B $= \bar{1}{,}9220332.$

Calculs définitifs.

1° *Calcul de* b.

log $a = 3{,}5729827$
log sin B $= \bar{1}{,}7397594$

log $b = 3{,}3127421$

pour 3127273	20546	$\Delta = 211.$
diff. = 148		
pour 148	0,70	

$b = 2054{,}670.$

2° *Calcul de* c.

log $a = 3{,}5729827$
log cos B $= \bar{1}{,}9220332$

log $c = 3{,}4950159$

pour 4950029	31261	$\Delta = 139.$
diff. = 130		
pour 125	0,9	
diff. = 5		
pour 4,2	0,03	

$c = 3126{,}193.$

Deuxième cas.

Données..... $\begin{cases} b = 2054{,}670, \\ B = 33^\circ 18' 52'',73. \end{cases}$ | **Inconnues**... $\begin{cases} C = 56^\circ 41' 7'',27, \\ a = 3740{,}957, \\ c = 3126{,}194. \end{cases}$

$$C = 90^\circ - B, \quad a = \frac{b}{\sin B} \quad c = b \cotg B.$$

Calculs auxiliaires.

1° *Calcul de* $\log$ b.

pour ...	20546	3127273	$\Delta = 211$.
pour	0,70	148	

$\log b = 3{,}3127421$.

2° *Calcul de* $colog \sin B$.

pour	33° 18′ 50″	$\bar{1}{,}7397506$	$\Delta = 321$.
pour	2″	64,2	
pour	0″,7	22,47	
pour	0″,03	0,963	

$\log \sin B = \bar{1}{,}7397594$,
$colog \sin B = 0{,}2602406$.

3° *Calcul de* $\log \cotg B$.

pour	33° 19′ 0″,	0,1822405	$\Delta = 459$.
pour	— 7″	321,3	
pour	— 0″,2	9,18	
pour	— 0″,07	3,213	

$\log \cotg B = 0{,}1822739$.

Calculs définitifs.

1° *Calcul de* a.

$\log b = 3{,}3127421$
$colog \sin B = 0{,}2602406$

$\log a = 3{,}5729827$

pour	5729761	37409	$\Delta = 116$.
diff. =	66		
pour	58	0,5	
diff. =	8		
pour	8	0,07	

$a = 3740{,}957$.

2° *Calcul de* c.

$\log b = 3{,}3127421$
$\log \cotg B = 0{,}1822739$

$\log c = 3{,}4950160$

pour	4950029	31261	$\Delta = 139$.
diff. =	131		
pour	125	0,9	
diff. =	6		
pour	5,6	0,04	

$c = 3126{,}194$.

Troisième cas.

Données..... $\begin{cases} a = 3740{,}957, \\ b = 2054{,}670. \end{cases}$ | **Inconnues...** $\begin{cases} B = 33^\circ\,18'\,52'',74, \\ C = 56^\circ\,41'\,7'',26, \\ c = 3126{,}193. \end{cases}$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}, \qquad B = 90^\circ - C, \qquad c = \sqrt{(a-b)(a+b)}.$$

Calculs auxiliaires.

$a - b = 1686{,}287,$
$a + b = 5795{,}627.$

1° Calcul de log (a — b).

pour	16862	2269091	Δ = 257.
pour	0,8	205,6	
pour	0,07	17,99	

$\log(a-b) = 3{,}2269315.$

2° Calcul de log (a + b).

pour	57956	7630981	Δ = 75.
pour	0,2	15	
pour	0,07	5,3	

$\log(a+b) = 3{,}7631004,$
$\operatorname{colog}(a+b) = \bar{4}{,}2368996.$

Calculs définitifs.

1° Calcul de C.

$\log(a-b) = 3{,}2269315$
$\operatorname{colog}(a+b) = \bar{4}{,}2368996$

$2\log\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \bar{1}{,}4638311$

$\log\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \bar{1}{,}7319155$

pour $\bar{1}{,}7318972$		28° 20′ 30″	Δ = 504.
diff. = 183			
pour	151,2	3″	
diff. =	31,8		
pour	30,24	0″,6	
diff. =	1,56		
pour	1,51	0″,03	

$\frac{C}{2} = 28^\circ\,20'\,33'',63$
$C = 56^\circ\,41'\,7'',26.$

2° Calcul de c.

$\log(a-b) = 3{,}2269315$
$\log(a+b) = 3{,}7631004$

$2\log c = 6{,}9900319$
$\log c = 3{,}4950159$

pour	4950029	31261	Δ = 139.
diff.. = 130			
pour	125	0,9	
diff.. =	5		
pour	4,2	0,03	

$c = 3126{,}193.$

Quatrième cas.

Données..... $b = 2054{,}670$, $c = 3126{,}193$.

Inconnues... $B = 33°\,18'\,52'',72$, $C = 56°\,41'\,7'',28$, $a = 3740{,}957$.

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c}, \quad C = 90° - B, \quad a = \frac{b}{\sin B}.$$

Calculs auxiliaires.

1° Calcul de log b.

pour	20546	3127273	$\Delta = 211$.
pour	0,70	148	

$\log b = 3{,}3127421$.

2° Calcul de colog c.

pour	31261	4950029	$\Delta = 139$.
pour	0,9	125,1	
pour	0,04	5,6	

$\log c = 3{,}4950160$,
$\operatorname{colog} c = \bar{4}{,}5049840$.

3° Calcul de colog sin B.

pour	33° 18′ 50″	$\bar{1}$,7397506	$\Delta = 321$.
pour	2″	64,2	
pour	0″,7	22,47	
pour	0″,02	0,642	

$\log \sin B = \bar{1}{,}7397593$
$\operatorname{colog} \sin B = 0{,}2602407$.

Calculs définitifs.

1° Calcul de B.

$\log b = 3{,}3127421$
$\operatorname{colog} c = \bar{4}{,}5049840$

$\log \operatorname{tg} B = \bar{1}{,}8177261$

pour	$\bar{1}$,8177136	33° 18′ 50″	$\Delta = 459$.
diff. =	125		
pour	91,8	2″	
diff. =	33,2		
pour	32,13	0″,7	
diff. =	1,07		
pour	0,91	0″,02	

$B = 33°\,18'\,52'',72$.

2° Calcul de a.

$\log b = 3{,}3127421$
$\operatorname{colog} \sin B = 0{,}2602407$

$\log a = 3{,}5729828$

pour	5729761	37409	$\Delta = 116$.
diff. =	67		
pour	58	0,5	
diff. =	9		
pour	8,1	0,07	

$a = 3740{,}957$.

146. Cas non classiques. — Les cas que nous venons d'examiner, cas dits « *classiques* », comprennent tous ceux où les données sont deux des éléments du triangle rectangle. Un tel triangle est,

cependant, parfaitement déterminé, lorsqu'on se donne deux quantités, dont au moins une longueur, liées intimement au triangle. Ainsi, par exemple, un triangle rectangle est déterminé dès qu'on se donne la hauteur relative à l'hypoténuse et un angle aigu; ou lorsqu'on donne les deux segments en lesquels la hauteur partage l'hypoténuse.

Si on a une donnée autre qu'un élément du triangle et un élément de ce triangle, on exprimera cette donnée en fonction des éléments du triangle. Cette égalité, jointe à trois des formules du n° 139, convenablement choisies, fournira quatre équations pour déterminer les quatre éléments inconnus.

Si les deux données ne sont, ni l'une ni l'autre, un élément du triangle, on exprimera ces deux données en fonction de ces éléments. On obtiendra ainsi deux égalités qui, jointes à trois des formules du n° 139, convenablement choisies, fourniront cinq équations pour déterminer les cinq éléments.

Voici deux exemples de ce genre de questions.

147. Problème. — *Résoudre un triangle rectangle, connaissant la hauteur* h, *relative à l'hypoténuse, et l'angle aigu* B.

Soit AH (*fig.* 38) cette hauteur. Dans le triangle rectangle ABH on a :

$$(1) \qquad h = \text{AB} \sin \text{B} = c \sin \text{B}.$$

Joignons à cette égalité les formules :

$$(2) \qquad \text{C} = 90^\circ - \text{B},$$
$$(3) \qquad b = c \operatorname{tg} \text{B},$$
$$(4) \qquad c = a \cos \text{B},$$

et nous aurons un système de quatre équations pour déterminer les quatre inconnues a, b, c, C.

On en tire, sans difficulté,

$$\left\{ \begin{aligned} c &= \frac{h}{\sin \text{B}}, \\ b &= \frac{h}{\cos \text{B}}, \\ a &= \frac{h}{\sin \text{B} \cos \text{B}}, \\ \text{C} &= 90^\circ - \text{B}; \end{aligned} \right.$$

formules qui résolvent la question.

148. Problème. — *Résoudre un triangle rectangle, connaissant les deux segments* m *et* n *en lesquels la hauteur relative à l'hypoténuse partage cette hypoténuse.*

Soit AH (*fig.* 38) cette hauteur. On connaît

$$BH = m, \quad CH = n.$$

on a alors, de suite,

(1) $a = m + n.$

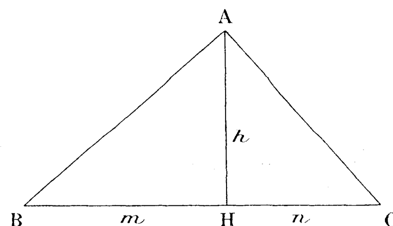


Fig. 38.

En second lieu, dans les triangles rectangles ABH et ACH on a :

$$m = AH \operatorname{cotg} B,$$
$$n = AH \operatorname{tg} B;$$

d'où, en divisant ces deux égalités, membre à membre,

$$\operatorname{tg}^2 B = \frac{n}{m},$$

(2) $$\operatorname{tg} B = \sqrt{\frac{n}{m}}.$$

A ces deux égalités (1) et (2) adjoignons les égalités :

(3) $$\begin{cases} B + C = 90^\circ, \\ b = a \sin B, \\ c = a \cos B, \end{cases}$$

et nous avons un système de cinq équations pour calculer les cinq inconnues a, b, c, B, C. On calcule d'abord a et B par les formules (1) et (2) et les formules (3) donnent, ensuite, C, b et c.

EXERCICES

52. Résoudre un triangle rectangle connaissant :

1° L'angle B et l'excès d de l'hypoténuse sur la hauteur;

2° Un côté de l'angle droit et l'angle α que fait la médiane relative à ce côté avec l'hypoténuse;

3° Le périmètre $2p$ et la hauteur h relative à l'hypoténuse ;

4° L'angle B et la somme, $s = b + c$, des deux côtés de l'angle droit;

5° L'hypoténuse a et la longueur l de la bissectrice de l'angle droit;

6° Les deux segments m et n en lesquels l'hypoténuse est partagée par le point de contact du cercle inscrit;

7° La surface S et l'un des angles aigus.

53. Démontrer qu'entre les cinq éléments d'un triangle rectangle on a les relations :

$$\cos(B - C) = \frac{2bc}{a^2},$$

$$\cos(2B - C) = \frac{b}{a^3}(3a^2 - 4b^2),$$

$$\cos 2B = \frac{c^2 - b^2}{a^2},$$

$$\operatorname{tg} 2B = \frac{2bc}{c^2 - b^2}.$$

54. Démontrer que la surface S d'un triangle rectangle est donnée par la formule

$$S = \frac{1}{4}(b + c + a)(b + c - a).$$

CHAPITRE II

FORMULES POUR DES TRIANGLES QUELCONQUES

149. Théorème. — *Dans un triangle, les côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés.*

Soit ABC un triangle (*fig.* 39) ; traçons le cercle circonscrit à ce triangle de centre O. Nous allons prouver que *le rapport d'un côté quelconque au sinus de l'angle opposé est égal au diamètre du cercle circonscrit*. La proposition énoncée en résultera bien évidemment.

Abaissons du centre O du cercle la perpendiculaire OH sur le côté BC et joignons OB. Évaluons l'angle $\widehat{BOH}$. Cet angle a même mesure que l'arc BK compris entre ses côtés, c'est-à-dire que la *moitié* de l'arc BC. Il peut se présenter deux cas.

Si l'angle A du triangle est aigu, cet angle a même mesure que la moitié de l'arc BC, et on a :

$$\widehat{BOH} = A.$$

Si A est obtus, le triangle a la forme BA'C (*fig.* 39) et l'angle A a

pour mesure la moitié de l'arc BAC et, dans ce cas, il est le supplément de l'angle $\widehat{BOH}$,

$$\widehat{BOH} = 180^\circ - A.$$

Dans les deux cas, puisque deux angles égaux ou supplémentaires ont même sinus, on a :

$$\sin \widehat{BOH} = \sin A.$$

Ceci posé, dans le triangle rectangle BOH, on a

$$HB = OB \sin(\widehat{BOH}).$$

Or BH est la moitié de BC, c'est-à-dire de a. Si donc on désigne par R le rayon du cercle circonscrit, on a :

Fig. 39.

$$\frac{a}{2} = R \sin A,$$

d'où

$$\frac{a}{\sin A} = 2R.$$

On aurait, évidemment, de même,

$$\frac{b}{\sin B} = 2R,$$

$$\frac{c}{\sin C} = 2R.$$

On a donc bien

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Remarque. — La démonstration précédente prouve, en outre, que la valeur commune des rapports tels que $\frac{a}{\sin A}$ est 2 R. Ceci nous sera utile pour le calcul du rayon du cercle circonscrit à un triangle.

150. Théorème. — *Dans un triangle, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés diminuée du double produit de ces deux côtés par le cosinus de l'angle opposé.*

Soit ABC un triangle et BH (*fig.* 40) la hauteur issue du sommet B. Nous distinguons deux cas :

1° L'angle A est aigu. Dans ce cas, l'on sait, d'après un théorème connu de géométrie [1], que l'on a (*fig.* 40, I).

$$(1) \qquad \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,AC \times AH.$$

Or,

$$BC = a,\ AB = c,\ AC = b\,;$$

de plus, le point H tombant entre A et C, l'angle $\widehat{HAB}$ est l'angle A du triangle et on a :

$$AH = AB \cos(\widehat{BAH}) = c \cos A.$$

On en conclut

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A.$$

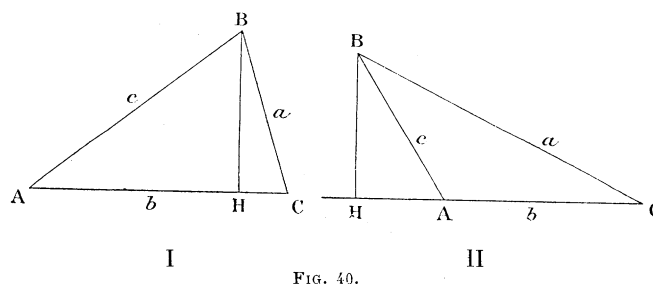


Fig. 40.

2° L'angle A est obtus. D'après le théorème précité, on a, alors (*fig.* 40, II).

$$(2) \qquad \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 + 2\,AC \times AH.$$

Or, ici, le point H tombe sur le prolongement de AC du côté de A. et l'angle $\widehat{BAH}$ est le supplément de l'angle A. On a donc :

$$\cos(\widehat{BAH}) = -\cos A$$

et

$$AH = AB \cos(\widehat{BAH}) = -c \cos A.$$

(1) Voir dans les *Leçons de Géométrie* de M. Hadamard, le n° 126.

Portant cette valeur de AH dans la relation (2) et remplaçant BC, AC et AB par leurs valeurs, on en conclut encore la relation :

$$(3) \qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A,$$

qui est donc vraie dans tous les cas.

On démontrerait, de même, que

$$(4) \qquad b^2 = c^2 + a^2 - 2\,ca \cos B,$$
$$(5) \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C.$$

Remarque. — On déduit aisément la formule (4) de la formule (3) par ce qu'on appelle une *permutation circulaire* effectuée sur les lettres a, b, c et A, B, C.

Permuter circulairement a, b, c, c'est remplacer a par b, b par c, c par a; c'est-à-dire que c'est remplacer chaque lettre par la suivante, la première, a, étant considérée comme celle qui suit la dernière c.

La formule (5) se déduit, de même, de la formule (4) par une permutation circulaire. Il suffit donc de connaître la formule (3) pour pouvoir écrire, immédiatement, les deux autres.

151. Théorème. — *Dans un triangle, un côté est égal à la somme des produits obtenus en multipliant chacun des deux autres côtés par le cosinus de l'angle qu'il forme avec ce premier côté.*

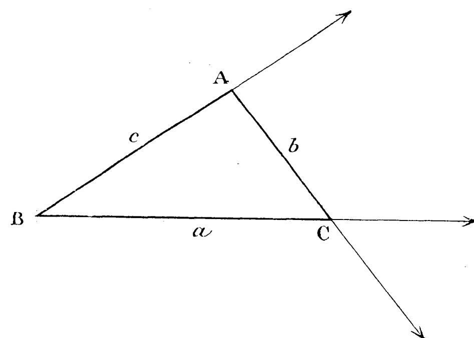


Fig. 41.

Soit (*fig.* 41) le triangle ABC. Prenons sur BA, AC et BC, des sens positifs de B vers A, de A vers C et de B vers C. On aura, alors,

$$\overline{BA} = c, \; \overline{AC} = b, \; \overline{BC} = a.$$

Or, le segment (BC) étant la résultante des segments (BA) et (AC),

on a, en projetant les trois segments sur un axe quelconque (nº 8),

$$proj.\ \overline{BC} = proj.\ \overline{BA} + proj.\ \overline{AC}.$$

Projetons sur l'axe BC, on aura :

$$proj.\ \overline{BC} = \overline{BC} = a,$$
$$proj.\ \overline{BA} = \overline{BA} \cos(\widehat{BC, BA}) = c \cos B.$$
$$proj.\ \overline{AC} = \overline{AC} \cos(\widehat{BC, AC}) = b \cos C.$$

On en conclut

$$a = b \cos C + c \cos B,$$

ce que nous voulions démontrer.

On prouverait, de même, que

$$b = c \cos A + a \cos C,$$
$$c = a \cos B + b \cos A,$$

relations qui se déduisent de la précédente par des permutations circulaires effectuées sur les lettres a, b, c et A, B, C.

Remarque. — Si, au lieu de projeter sur l'axe BC, on projetait sur un axe perpendiculaire à BC, on aurait, comme il est facile de s'en rendre compte,

$$0 = c \sin B - b \sin C,$$

et on retrouverait, par une nouvelle voie, les relations du nº 149.

152. Résumé. — Des trois théorèmes qui précèdent, il résulte que l'on a, entre les six éléments, a, b, c et A, B, C d'un triangle quelconque, les trois groupes de formules suivants :

$$[58] \quad \begin{cases} \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}, \\ A + B + C = 180^\circ; \end{cases}$$

$$[59] \quad \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B, \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C; \end{cases}$$

$$[60] \quad \begin{cases} a = b \cos C + c \cos B, \\ b = c \cos A + a \cos C, \\ c = a \cos B + b \cos A. \end{cases}$$

Les groupes [**58**] et [**59**] sont formés d'égalités dont chacune contient quatre éléments du triangle. Il est facile de se rendre compte qu'on peut en déduire *toutes* les relations qui peuvent exister entre quatre éléments quelconques d'un triangle.

D'abord, entre quatre éléments d'un triangle, dont au moins deux côtés, il ne peut exister deux relations distinctes. Car, sans cela, en résolvant ces deux relations par rapport à deux côtés, on pourrait calculer deux côtés du triangle ne connaissant que *deux* autres éléments; par suite, un triangle serait déterminé par deux éléments, ce qui n'est pas.

Ceci posé, il peut d'abord y avoir trois relations contenant chacune les trois côtés et un angle : ce sont les relations du groupe [**59**]. Il peut, ensuite, exister neuf relations contenant chacune deux angles et deux côtés : ces neuf relations sont toutes contenues, implicitement, dans le groupe [**58**]. En remarquant, en effet, que

$$\sin A = \sin (B + C),$$
$$\sin B = \sin (C + A),$$
$$\sin C = \sin (A + B),$$

puisque

$$A + B + C = 180°,$$

on déduit, des relations [**58**], les 9 suivantes :

$$a \sin B - b \sin A = 0, \quad b \sin C - c \sin B = 0,$$
$$c \sin A - a \sin C = 0,$$
$$a \sin (C + A) - b \sin A = 0, \quad b \sin (A + B) - c \sin B = 0,$$
$$c \sin (B + C) - a \sin C = 0,$$
$$a \sin B - b \sin (B + C) = 0, \quad b \sin C - c \sin (C + A) = 0,$$
$$c \sin A - a \sin (A + B) = 0.$$

Enfin, il ne peut exister une relation contenant les trois angles et un côté, où ce côté figure *effectivement;* car, sans cela, on pourrait calculer un côté d'un triangle, en connaissant les trois angles; et deux triangles semblables seraient égaux.

Donc, si l'on cherche une relation ne contenant qu'un seul côté, ce côté ne pourra pas y figurer et on devra parvenir à une égalité équivalente à

$$A + B + C = 180°.$$

Nous avons donc toutes les formules à quatre éléments possibles.

153. Équivalence des trois groupes. — Il est aisé d'apercevoir, *a priori*, qu'il ne peut exister plus de trois relations distinctes entre les six éléments d'un triangle. S'il en existait, effectivement, quatre, on pourrait, grâce à ces quatre relations, calculer quatre éléments du triangle, n'en connaissant que *deux* et un triangle serait parfaitement déterminé par deux éléments. Or, ceci est contraire aux propriétés géométriques connues des triangles.

Chacun des groupes [**58**], [**59**], [**60**] étant formé de trois égalités distinctes, il est donc à prévoir que ces trois groupes ne sont pas indépendants et que, de l'un d'eux, on peut déduire les deux autres.

C'est ce que nous allons montrer.

Précisons. Nous allons prouver, non pas que les trois groupes sont absolument équivalents *quels que soient* a, b, c A, B, C, mais qu'ils le sont lorsque a, b, c A, B, C sont les éléments possibles d'un triangle : c'est-à-dire *lorsque* a, b, c *sont positifs et lorsque* A, B, C *sont des angles positifs et plus petits que* 180° (1).

1° *Équivalence des groupes* [**59**] *et* [**60**]. — Étant donné le groupe [**60**], proposons-nous, par exemple, d'en déduire la première formule [**59**]. Cette formule est l'*unique* formule qui contient les éléments a, b, c, A; on l'obtiendra donc *certainement* en éliminant cos B et cos C entre les formules [**60**].

Des deux dernières équations [**60**] je tire :

$$\cos C = \frac{b - c \cos A}{a},$$

$$\cos B = \frac{c - b \cos A}{a}.$$

Portons ces valeurs dans la première, il vient, en multipliant par a,

$$a^2 = b(b - c \cos A) + c(c - b \cos A),$$

d'où, en simplifiant,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Le groupe [**59**] est donc une conséquence du groupe [**60**].

Réciproquement, montrons que le groupe [**60**] peut se déduire du groupe [**59**]. Proposons-nous, par exemple, connaissant le groupe [**59**], d'obtenir la première des formules [**60**]. Il suffit, pour cela, d'ajouter,

(1) Il faut remarquer que ceci exclut les valeurs limites. Ainsi, a, b, c seront *différents de zéro* et A, B, C seront supposés *différents de* 0° *et de* 180°.

membre à membre, les deux dernières relations [**59**]. Il vient, en effet, en supprimant $b^2 + c^2$ aux deux membres,

$$0 = 2a^2 - 2ca \cos B - 2ab \cos C.$$

Divisons les deux membres par $2a$, qui est différent de zéro par hypothèse, et nous avons :

$$a = c \cos B + b \cos C,$$

qui est bien la première égalité [**60**].

2° *Équivalence des groupes* [**58**] *et* [**60**]. — Connaissant le groupe [**58**], il est facile d'en déduire le groupe [**60**]. Cherchons, par exemple, à former la première équation [**60**].

Puisque

$$A = 180° - (B + C),$$

on a :

$$\sin A = \sin (B + C),$$

c'est-à dire

$$\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B.$$

Désignons par k le rapport $\frac{\sin A}{a}$, on aura, d'après les premières formules [**58**],

$$\sin A = ka,$$
$$\sin B = kb,$$
$$\sin C = kc.$$

Portons ces valeurs dans la relation précédente ; il vient :

$$ka = kb \cos C + kc \cos B.$$

En divisant par k qui ne peut être nul, on a bien

$$a = b \cos C + c \cos B.$$

Réciproquement, du groupe [**60**] cherchons à déduire le groupe [**58**]. La relation :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

étant la *seule* relation qui puisse exister entre a, b, A et B, on l'obtiendra *certainement* en éliminant c et $\cos C$ entre les égalités [**60**].

Des deux premières égalités [**60**], on tire :

$$\cos C = \frac{b \cos B - a \cos A}{a \cos B - b \cos A},$$

$$c = \frac{a^2 - b^2}{a \cos B - b \cos A}.$$

Portons cette valeur de c dans la deuxième, il vient, après avoir chassé le dénominateur,

$$a^2 - b^2 = (a \cos B + b \cos A)(a \cos B - b \cos A)$$

ou

$$a^2 - b^2 = a^2 \cos^2 B - b^2 \cos^2 A,$$
$$a^2 (1 - \cos^2 B) = b^2 (1 - \cos^2 A)$$

et, enfin,

$$a^2 \sin^2 B = b^2 \sin^2 A.$$

Comme, d'après les restrictions faites plus haut, a, b, sin A et sin B sont positifs, on conclut de là, sans ambiguïté,

$$a \sin B = b \sin A$$

ou

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

On prouverait de même que

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

La proportionnalité des sinus aux côtés étant ainsi établie, nous pourrons en tenir compte pour obtenir la deuxième relation [**58**]

$$A + B + C = 180^\circ.$$

Posons

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = h,$$

nous aurons

$$a = h \sin A, \quad b = h \sin B, \quad c = h \sin C.$$

Portons ces valeurs de a, b, c dans les trois égalités [**60**], elles deviennent, après avoir divisé par h,

$$\sin A = \sin (B + C),$$
$$\sin B = \sin (C + A),$$
$$\sin C = \sin (A + B).$$

A, B et C étant, par hypothèse, des angles compris entre 0° et 180°, la première de ces égalités ne peut avoir lieu que si on a

soit $$A = B + C,$$

soit $$A + B + C = 180°.$$

De même, la seconde relation exige que l'on ait

soit $$B = C + A,$$

soit $$A + B + C = 180°.$$

Et, enfin, la troisième relation donne

soit $$C = A + B,$$

soit $$A + B + C = 180°.$$

Si donc on n'avait pas

$$A + B + C = 180°,$$

il faudrait avoir, *à la fois*,

$$A = B + C, \quad B = C + A, \quad C = A + B$$

et ceci est impossible car on en déduirait

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0.$$

3° *Équivalence des groupes* [**58**] *et* [**59**]. — Les groupes [**58**] et [**59**] étant équivalents, l'un et l'autre, au groupe [**60**], sont, nécessairement, équivalents entre eux.

154. Théorème. — a, b, c *étant trois nombres positifs et* A, B, C *trois angles positifs plus petits que* 180° *vérifiant l'un des trois groupes* [**58**], [**59**] *ou* [**60**], *il existe un triangle dont les côtés ont pour mesures* a, b, c *et dont les angles sont* A, B, C.

Les trois groupes [**58**], [**59**] et [**60**] étant équivalents lorsque a, b, c

sont positifs et A, B, C compris entre 0° et 180°, il suffit d'établir la proposition dans le cas où les six quantités vérifient le groupe [**59**].

Je dis, d'abord, qu'avec les trois longueurs a, b, c, on peut construire un triangle. Pour cela, il suffit de prouver que l'une quelconque de ces longueurs est plus petite que la somme des deux autres. Or, on a, par hypothèse,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

et, comme

$$\cos A > -1,$$

on en conclut que

$$a^2 < b^2 + c^2 + 2bc,$$
$$a^2 < (b + c)^2.$$

a et $b + c$ étant positifs, ceci entraîne

$$a < b + c.$$

On verrait de même que

$$b < c + a,$$
$$c < a + b.$$

Je dis, maintenant, que les angles de ce triangle sont égaux à A, B et C. Soit, en effet, A′ l'angle opposé au côté a. On aura, d'après le théorème du n° 150,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A'.$$

Mais, par hypothèse, on a aussi

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A;$$

on en conclut que

$$\cos A' = \cos A.$$

Les angles A′ et A étant compris entre 0 et 180° ceci ne peut avoir lieu que si

$$A' = A.$$

On montrerait, de la même façon, que l'angle opposé au côté b est B et que celui qui est opposé à c est C.

Remarque. — Ce théorème aura son importance dans la discussion des problèmes de résolution de triangles. Car, pour exprimer

qu'un tel problème a une solution, il suffira d'exprimer que les valeurs trouvées pour a, b, c, sont positives et que celles de A, B, C sont comprises entre 0° et 180°. Il sera inutile de vérifier, comme on est forcé de le faire en algèbre, que chacun des côtés est plus petit que la somme des deux autres, puisque cela aura toujours lieu.

155. Théorème. — *La surface d'un triangle a pour mesure le demi-produit de deux côtés par le sinus de l'angle compris.*

Soit un triangle ABC, BH (fig. 40) la hauteur issue du sommet B. La surface S du triangle est donnée par la formule (1) :

$$S = \frac{AC \times BH}{2}.$$

Dans le triangle rectangle BAH, on a

$$AH = AB \sin (\widehat{BAH}).$$

Il peut, alors, se présenter deux cas.

Si l'angle A est aigu (fig. 40, I), H tombe entre A et C et on a,

$$\widehat{BAH} = A.$$

Si l'angle A est obtus (fig. 40, II), il tombe sur le prolongement de AC, au delà de A, et on a

$$\widehat{BAH} = 180° - A.$$

Dans les deux cas on a :

$$\sin (\widehat{BAH}) = \sin A,$$

et, par suite,

$$AH = c \sin A.$$

Comme, d'ailleurs,

$$AC = b,$$

on a, finalement,

[**61**] $$S = \frac{bc \sin A}{2}.$$

(1) Voir dans les *Leçons de Géométrie* de M. Hadamard, le n° 249.

On a, de même,

$$S = \frac{ca \sin B}{2},$$

$$S = \frac{ab \sin C}{2}.$$

Remarque. — En égalant ces trois valeurs de S, on retrouverait, d'une troisième manière, les égalités du n° 149.

EXERCICES

55. Si dans un triangle on a :

$$\frac{\sin A}{\sin B} = 2 \cos C,$$

le triangle est isoscèle.

56. Si dans un triangle on a :

$$\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C},$$

le triangle est rectangle en A.

57. Si dans un triangle on a :

$$\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 B},$$

le triangle est isoscèle ou rectangle.

58. Si dans un triangle l'angle A est égal à 120°, on a :

$$b(a^2 - b^2) = c(a^2 - c^2).$$

59. Dans un triangle quelconque on a :

$$\operatorname{tg} B = \frac{b \sin C}{a - b \cos C},$$

$$\frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 + c^2 - b^2},$$

$$\frac{\sin (A - B)}{\sin (A + B)} = \frac{a^2 - b^2}{c^2},$$

$$\cos A + \cos B = 2 \frac{a + b}{c} \sin^2 \frac{C}{2}.$$

CHAPITRE III

RÉSOLUTION DES TRIANGLES QUELCONQUES

156. Cas classiques. — Des propriétés géométriques des triangles, il résulte qu'un triangle quelconque est déterminé dès qu'on se donne trois quantités indépendantes [1] liées à ce triangle, dont au moins une longueur.

Les cas dits « *classiques* » sont ceux où les trois données sont trois des éléments du triangle, dont au moins un côté.

Nous désignerons, comme toujours, par a, b, c, les trois côtés du triangle, et par A, B, C, les angles.

Il est aisé de se rendre compte, *a priori*, qu'étant donnés trois des six éléments, les formules [**58**] et [**59**] permettent de calculer tous les autres. Comme nous l'avons, en effet, remarqué (n° 152), les groupes [**58**] et [**59**] fournissent toutes les relations à quatre éléments possibles. Étant donnés trois éléments, on pourra toujours tirer de ces deux groupes une formule contenant ces trois éléments et un quatrième élément inconnu (pourvu qu'il y ait au moins un côté dans les données). Cette formule fera connaître l'élément inconnu en fonction des trois autres.

Énumérons les divers cas qui peuvent se présenter.

1° On peut se donner *un côté* et *deux angles*. Peu importe quels sont ces deux angles, car dès qu'on connaît deux angles on connaît le troisième, en prenant le supplément de la somme des deux autres.

2° On peut se donner *deux côtés* et *un angle*. Ce cas se subdivise en deux, suivant que l'angle est compris entre les deux côtés ou opposé à l'un d'eux.

3° On peut se donner les *trois côtés*.

Il y a donc, en tout, *quatre* cas que nous allons examiner successivement.

(1) Il faut remarquer que, dire que les trois données sont *indépendantes*, équivaut à dire que parmi ces trois données il y a au moins une longueur. Car trois angles liés aux angles d'un triangle ne peuvent être indépendants, puisque la somme des trois angles du triangle doit être égale à 180°.

157. Premier cas. — *Résoudre un triangle connaissant un côté et deux angles.*

Supposons qu'on connaisse le côté a et les deux angles adjacents B et C.

Écrivons les formules [**58**],

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$
$$A + B + C = 180°.$$

On a, immédiatement, A

$$A = 180° - (B + C).$$

Connaissant les trois angles, on a les deux côtés b et c :

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \qquad c = \frac{a \sin C}{\sin A},$$

par des formules calculables par logarithmes.

La surface S est donnée par l'égalité (n° 155) :

$$S = \frac{bc \sin A}{2}$$

d'où, en remplaçant b et c par leurs valeurs,

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}.$$

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que la somme B + C soit plus petite que 180°.

158. Deuxième cas. — *Résoudre un triangle connaissant les deux côtés et l'angle compris.*

Soient b et c les deux côtés connus, A l'angle compris.

On a, de suite, pour déterminer les deux angles B et C, le système suivant de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} \dfrac{\sin B}{\sin C} = \dfrac{b}{c}, \\ B + C = 180° - A, \end{cases}$$

fourni par le groupe [**58**]. Nous sommes ainsi ramené à un problème connu (n° 134).

La première égalité s'écrit, en suivant la marche indiquée au nº 134,

$$\frac{\sin B - \sin C}{\sin B + \sin C} = \frac{b - c}{b + c},$$

ou, d'après une transformation connue (nº 93),

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{B - C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{B + C}{2}} = \frac{b - c}{b + c}.$$

Or, puisque

$$(1) \qquad \frac{B + C}{2} = 90° - \frac{A}{2},$$

on en tire :

$$(2) \qquad \operatorname{tg} \frac{B - C}{2} = \frac{b - c}{b + c} \operatorname{cotg} \frac{A}{2}.$$

Les égalités (1) et (2) donnent donc $\frac{B + C}{2}$ et $\frac{B - C}{2}$; on en conclut B et C.

Connaissant les angles, l'égalité

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

donnera le côté a :

$$(3) \qquad a = \frac{b \sin A}{\sin B}.$$

On peut calculer a d'une autre manière, souvent plus avantageuse. Les égalités

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

donnent, en ajoutant les numérateurs et les dénominateurs des deux derniers rapports,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b + c}{\sin B + \sin C} = \frac{b + c}{2 \sin \frac{B + C}{2} \cos \frac{B - C}{2}}.$$

On en tire

$$a = \frac{(b + c) \sin A}{2 \sin \frac{B + C}{2} \cos \frac{B - C}{2}}.$$

Or on a :

$$\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2},$$

$$\sin \frac{B + C}{2} = \cos \frac{A}{2};$$

en portant ces valeurs dans la relation qui précède et divisant haut et bas par $2 \cos \frac{A}{2}$, il vient

$$(4) \qquad a = \frac{(b + c) \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B - C}{2}}.$$

Lorsqu'on connaît b et c (et non leurs logarithmes), il sera préférable d'appliquer la formule (4). En effet, le calcul de $\frac{B - C}{2}$ par la formule (2) aura déjà exigé le calcul de $\log (b + c)$ on n'aura donc que *deux* logarithmes nouveaux à calculer : ceux de $\sin \frac{A}{2}$ et de $\cos \frac{B - C}{2}$; tandis que la formule (3) exigerait *trois* calculs de logarithmes.

Pour la surface on a :

$$S = \frac{bc \sin A}{2}.$$

Discussion. — Comme la tangente peut prendre toutes les valeurs possibles, la valeur de $\operatorname{tg} \frac{B - C}{2}$ donnée par la formule (2) sera toujours acceptable.

Supposons, ce qui est permis, b plus grand que c. La valeur

de $\operatorname{tg} \frac{B - C}{2}$ sera positive et on trouvera, dans la table, un angle α, compris entre 0° et 90°, tel que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b - c}{b + c} \operatorname{cotg} \frac{A}{2}.$$

Les angles B et C étant compris entre 0° et 180°, l'angle $\frac{B - C}{2}$ sera compris entre $-90°$ et $+90°$. Il n'y a donc qu'une valeur à prendre pour $\frac{B - C}{2}$, c'est :

$$\frac{B - C}{2} = \alpha.$$

On a, d'ailleurs,

$$\frac{B + C}{2} = 90° - \frac{A}{2}.$$

On en conclut

$$B = 90° - \frac{A}{2} + \alpha,$$

$$C = 90° - \frac{A}{2} - \alpha.$$

Pour que ces valeurs de B et C soient acceptables, il faut qu'elles soient comprises entre 0° et 180°. Ceci a évidemment lieu pour B, car A étant compris entre 0° et 180°, B est la somme de deux angles $90° - \frac{A}{2}$ et α tous deux compris entre 0° et 90°.

La valeur de C est certainement plus petite que 180° ; il faut, encore, qu'elle soit positive. On doit donc avoir :

$$90° - \frac{A}{2} > \alpha.$$

Les angles $90° - \frac{A}{2}$ et α, étant compris entre 0° et 90°, sont rangés dans le même ordre de grandeur que leurs tangentes. L'inégalité précédente sera donc vérifiée si on a :

$$\operatorname{cotg} \frac{A}{2} > \operatorname{tg} \alpha$$

ou

$$\operatorname{cotg} \frac{A}{2} > \frac{b - c}{b + c} \operatorname{cotg} \frac{A}{2}$$

ou, enfin,

$$1 > \frac{b-c}{b+c};$$

et ceci a bien lieu.

Les valeurs de B et C sont donc toujours acceptables et comme la valeur de a donnée par la formule (3) ou la formule (4) est positive, le problème, d'après une remarque faite plus haut (n° 154), a *toujours* une solution et une seule.

Ce résultat est évident géométriquement, car on peut toujours construire un triangle dont on connaît deux côtés et l'angle compris, quelles que soient les données.

Remarque I. — La formule (2) n'est calculable par logarithmes que si on connaît les côtés b et c eux-mêmes. Dans bien des questions, en particulier dans les calculs de triangulation (voir plus loin n° 178), on ne connaît pas b et c, mais seulement leurs logarithmes. Pour éviter des calculs inutiles, il faut, alors, rendre cette formule calculable par logarithmes. Pour cela, on rendra l'expression $\frac{b-c}{b+c}$ calculable par la méthode générale exposée plus haut (n° 122). On pose :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{c}{b}$$

et on a :

$$\frac{b-c}{b+c} = \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi);$$

par suite,

$$\operatorname{tg} \frac{B-C}{2} = \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi) \operatorname{cotg} \frac{A}{2}.$$

Dans ce cas, il sera plus avantageux d'employer la formule (3), pour calculer a, puisqu'on connaît déjà *log* b.

Remarque II. — Le procédé de calcul de a que nous avons exposé plus haut suppose que l'on ait calculé, au préalable, B et C, ou, du moins, $\frac{B-C}{2}$. On pourrait se proposer de calculer directement a en fonction des donnés b, c, A. A cet effet, il faut prendre dans le groupe [**59**] la formule à quatre termes qui contient a, b, c, A. C'est la suivante :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

qui donne

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A}.$$

Cette formule devra être rendue calculable par logarithmes. Ce calcul a été fait, comme exercice, au n° 124 et nous avons vu que, si on pose,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b - c}{b + c} \operatorname{cotg} \frac{A}{2},$$

on a :

$$a = \frac{(b + c) \sin \frac{A}{2}}{\cos \varphi}.$$

Or, si on compare la formule qui donne $\operatorname{tg} \varphi$ à celle qui donne $\frac{B - C}{2}$, on voit que l'on a :

$$\varphi = \frac{B - C}{2}.$$

On retombe donc, pour le calcul de a, sur la formule (4). Ce nouveau calcul de a, dirigé de la façon la plus avantageuse (de manière à n'employer qu'*un* angle auxiliaire φ), nous ramène donc aux calculs précédents.

Remarque III. — La formule (4) peut servir comme formule de *vérification* pour le premier cas.

D'autre part, on pourrait encore calculer a par la formule suivante :

$$a = \frac{(b - c) \cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{B - C}{2}} \tag{5}$$

qui s'établit, de la même façon que la formule (4), en écrivant :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b - c}{\sin B - \sin C}.$$

Cette formule (5) pourrait servir, d'ailleurs, pour la vérification de l'exactitude des résultats dans le second cas.

159. Troisième cas (cas douteux). — *Résoudre un triangle connaissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux.*

Supposons que l'on connaisse les deux côtés a, b et l'angle A opposé au côté a.

L'égalité

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

donne, immédiatement, l'angle B,

$$(1) \qquad \sin B = \frac{b \sin A}{a}.$$

Connaissant A et B, on a

$$(2) \qquad C = 180^\circ - (A + B).$$

Les trois angles étant connus, c est donné par la formule :

$$(3) \qquad c = \frac{a \sin C}{\sin A};$$

et la surface est

$$S = \frac{ab \sin C}{2}.$$

Discussion. — L'angle B étant donné par son sinus, il faut que la valeur de ce sinus soit acceptable. Comme elle est positive, il suffit, pour cela, qu'elle soit au plus égale à 1. On doit donc avoir, d'abord,

$$(4) \qquad b \sin A \leqslant a.$$

Cette condition étant remplie, on trouvera, dans les tables, un angle β, compris entre 0° et 90°, tel que

$$\sin \beta = \frac{b \sin A}{a}.$$

B étant assujetti à la condition d'être compris entre 0° et 180°, on pourra prendre pour B soit :

$$B = \beta$$

soit $$B = 180^\circ - \beta.$$

A ces deux valeurs de B correspondent, pour C, les deux valeurs :

$$C = 180^\circ - A - \beta, \tag{5}$$
$$C = \beta - A. \tag{6}$$

Pour que l'une quelconque de ces deux valeurs de C soit acceptable, il faut qu'elle soit comprise entre 0° et 180°. Nous distinguerons, alors, deux cas.

1° A *est aigu.* — La valeur (5) est certainement acceptable, car on l'obtient en retranchant de 180° l'angle $A + \beta$ qui est plus petit que 180°.

Pour que la valeur (6) convienne, il faut et il suffit qu'elle soit positive, car elle est certainement plus petite que 90°. Il faut donc que l'on ait :

$$\beta > A.$$

Or, les angles β et A étant compris entre 0° et 90°, sont rangés dans le même ordre de grandeur que leurs sinus. L'inégalité précédente sera donc vérifiée si on a

$$\sin \beta > \sin A$$

ou

$$\frac{b \sin A}{a} > \sin A.$$

Comme sin A est positif, ceci entraîne

$$b > a.$$

Donc, dans ce premier cas, si

$$b \leqslant a,$$

le problème n'a qu'*une* solution obtenue en prenant la valeur (5) de C.

Si
$$b > a,$$

le problème a *deux* solutions.

2° *L'angle* A *est obtus ou droit.* — La valeur (6) de C ne convient, alors, certainement pas, puisqu'elle est négative (β est aigu).

Le problème n'admet donc de solution que si la valeur (5) est acceptable. Cette valeur étant plus petite que 180°, il suffit qu'elle soit positive. Il faut donc avoir :

$$180^\circ - A > \beta.$$

Les angles $180^\circ - A$ et β étant tous deux aigus, l'inégalité sera vérifiée si on a

$$\sin (180^\circ - A) > \sin \beta$$

ou

$$\sin A > \frac{b \sin A}{a}.$$

sin A étant positif, ceci entraîne

$$a > b.$$

Donc, dans ce cas, si

$$a \leqslant b,$$

le problème n'a *pas de solution*.

Si

$$a > b,$$

le problème a *une seule* solution dans laquelle C a la valeur (5).

Résumé. — Cette discussion se résume de la façon suivante :

$$b \sin A > a \qquad\qquad \textit{pas de solution.}$$

$$b \sin A \leqslant a \begin{cases} A < 90^\circ \begin{cases} a \geqslant b & \textit{une solution} \\ a < b & \textit{deux solutions} \end{cases} \\ A \geqslant 90^\circ \begin{cases} a > b & \textit{une solution} \\ a \leqslant b & \textit{pas de solution.} \end{cases} \end{cases}$$

Ce tableau de discussion peut être présenté d'une autre manière qui est plus intéressante. Remarquons, à cet effet, que la condition

$$a \geqslant b$$

entraîne certainement la condition

$$a \geqslant b \sin A,$$

puisque sin A est plus petit que 1. De plus, dans le cas $a > b$, il y a toujours une solution et une seule.

On a donc :

$a > b$		*une solution.*
$a = b$	$A < 90°$	*une solution*
	$A \geqslant 90°$	*pas de solution.*
$a < b$	$b \sin A > a$	*pas de solution*
	$b \sin A \leqslant a$; $A < 90°$	*deux solutions*
	$b \sin A \leqslant a$; $A \geqslant 90°$	*pas de solution.*

Remarque I. — Il serait facile de retrouver les résultats de la discussion précédente par une voie géométrique.

Proposons-nous, en effet, de *construire* le triangle avec les données a, b, A. Reprenons, pas à pas, la construction indiquée en géométrie [1]. Ayant tracé un angle égal à A (*fig.* 42), on porte, sur l'un des côtés, une longueur AC égale à b. Du point C comme centre, avec a pour rayon, on décrit un cercle qui coupe le second côté AB'

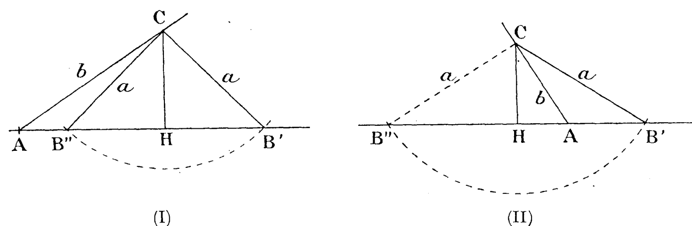


Fig. 42.

au point B qui est le troisième sommet du triangle ABC cherché.

Soit CH la hauteur issue de C.

1° Si $CH > a$, la circonférence ne coupe pas la droite. Le problème est impossible. Or, dans le triangle rectangle ACH, on a :

$$CH = b \sin \widehat{CAH}.$$

Si l'angle A est aigu (*fig.* 42, I), on a

$$\widehat{CAH} = A ;$$

si l'angle A est obtus (*fig.* 42, II), on a

$$\widehat{CAH} = 180° - A.$$

(1) Voir le n° 87, construction 9, des *Leçons de Géométrie* de M. Hadamard.

Dans les deux cas

$$\sin \widehat{CAH} = \sin A,$$

et, par suite,

$$CH = b \sin A.$$

La condition $CH > a$ s'écrit donc :

$$b \sin A > a.$$

2° Si $CH < a$, c'est-à-dire si $b \sin A < a$, la circonférence coupe la droite AB′ en deux points B′ et B″. Mais il reste à savoir si ces points sont sur la demi-droite AB′ ou de l'autre côté du point A.

Distinguons deux cas.

L'angle A *est aigu* (*fig.* 42, I). Dans ce cas, H est sur AB′. B′ est toujours acceptable. Il y a toujours *une* solution. Pour que la solution B″ convienne, il faut que l'oblique CB″ soit plus courte que l'oblique CA. Il faut donc que

$$a < b.$$

L'angle A *est obtus* (*fig.* 42, II). Le point H n'est pas sur AB′. La solution B″ n'est jamais acceptable. — Pour que la solution B′ convienne, il faut que l'oblique CB′ soit plus grande que CA ; il faut donc que l'on ait :

$$a > b.$$

Ces résultats sont en concordance absolue avec les précédents.

Remarque II. — La discussion précédente nous a montré que le problème admettait *toujours* une solution et *une seule* lorsque

$$a > b$$

c'est-à-dire lorsque l'angle donné A est opposé au plus grand des deux côtés. On peut donc énoncer la proposition suivante [1] :

Deux triangles sont égaux lorsqu'ils ont deux côtés égaux, chacun à chacun, et l'angle opposé au plus grand de ces deux côtés.

Remarque III. — La formule (3) que nous donnons plus haut pour le calcul de c suppose qu'on ait calculé, au préalable, l'angle C. On pourrait chercher à calculer *directement* c en fonction des données.

(1) Cet énoncé pourrait être considéré comme un *quatrième cas d'égalité des triangles*. Dans les traités de géométrie élémentaire classiques allemands, ce quatrième cas est toujours énoncé à côté des trois autres.

Il faut, pour cela, prendre la formule à quatre termes qui contient c, a, b, A. Cette formule est :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

c est donc ainsi fourni par une équation du second degré

$$(7) \qquad c^2 - 2bc \cos A + b^2 - a^2 = 0.$$

Cette équation donne, pour c deux valeurs, pourvu que l'on ait :

$$b^2 \cos^2 A - b^2 + a^2 \geqslant 0,$$
$$a^2 \geqslant b^2 \sin^2 A,$$

ou

$$a \geqslant b \sin A.$$

C'est la condition (4). Pour que ces valeurs soient acceptables, il faut, encore, qu'elles soient positives.

1° Si $b < a$, le produit des racines est négatif, il y a toujours une racine positive et *une seule*.

2° Si $b > a$, le produit des racines est positif, la somme est égale à $2b \cos A$. Donc, si A est aigu, cos A est positif et les deux racines sont positives, donc admissibles. Si A est obtus, cos A est négatif et les deux racines sont négatives, donc inacceptables.

3° Si $b = a$, il y a une racine nulle, inacceptable. L'autre racine est égale à $2b \cos A$ et n'est admissible que si A est aigu.

Nous retrouvons, ainsi, par une troisième voie, les résultats de la discussion précédente.

Pour faire le calcul effectif de c par l'équation (7), il faudra rendre la formule de résolution calculable par logarithmes. Nous suivrons pour cela, pas à pas, la méthode générale (n° 125). On a, en résolvant :

$$c = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}$$

ou

$$c = b \left[\cos A \pm \sin A \sqrt{\frac{a^2}{b^2 \sin^2 A} - 1} \right].$$

Posons :

$$\sin \varphi = \frac{b \sin A}{a},$$

et nous aurons :

$$c = b\,\frac{\cos A \sin \varphi \pm \sin A \cos \varphi}{\sin \varphi},$$

$$c = b\,\frac{\sin (\varphi \pm A)}{\sin \varphi}.$$

Or, si nous comparons la valeur de sin φ à celle de sin B donnée par la formule (1), nous voyons que

$$\sin \varphi = \sin B.$$

φ étant compris entre 0° et 90°, on a

$$\varphi = \beta,$$

β étant l'angle que nous avons défini dans la discussion. Les deux valeurs de c sont donc :

$$c = b\,\frac{\sin (\beta + A)}{\sin \beta}, \quad c = b\,\frac{\sin (\beta - A)}{\sin \beta}.$$

Ce sont précisément les valeurs que l'on obtient en prenant pour C, successivement, les valeurs (5) et (6) dans la formule (3).

Les calculs auxquels on est conduit par l'application de la formule (7) sont donc *identiques* à ceux que nous avons indiqués plus haut. Il faut donc toujours passer par le calcul préalable de B (ou β), pour calculer, par logarithmes, le côté c.

160. Quatrième cas. — *Résoudre un triangle connaissant les trois côtés.*

Les formules [**59**] résolvent la question, car chacune d'elles fournit un angle en fonction des côtés. Ainsi, on a

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

On en tire

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Cette formule n'est pas calculable par logarithmes. Pour obtenir une formule calculable par logarithmes, on cherche les lignes

trigonométriques de l'angle moitié $\frac{A}{2}$. On a, comme on sait (n° 86),

$$2\cos^2\frac{A}{2} = 1 + \cos A = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

on en tire :

$$\left\{\begin{aligned} \cos^2\frac{A}{2} &= \frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}, \\ \sin^2\frac{A}{2} &= \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}. \end{aligned}\right.$$

Pour simplifier l'écriture, désignons par $2p$ le périmètre du triangle,

$$2p = a + b + c;$$

on a alors,

$$\begin{aligned} 2(p-a) &= b + c - a, \\ 2(p-b) &= c + a - b, \\ 2(p-c) &= a + b - c. \end{aligned}$$

On en conclut

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{p(p-a)}{bc},$$

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc};$$

et, par suite,

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.$$

En divisant ces deux égalités, membre à membre, on obtient :

$$\text{tg}\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

On calculerait, de même, les lignes des angles $\frac{B}{2}$ et $\frac{C}{2}$; mais les formules que l'on obtiendrait se déduisent facilement des précédentes en faisant une permutation circulaire sur les lettres a, b, c et A, B, C.

On emploie de préférence, pour calculer les angles, les formules qui donnent les tangentes et ceci pour deux raisons. D'abord parce qu'elles donnent lieu à des calculs moins longs : on n'aura en effet que *quatre* logarithmes à calculer ceux de p, $p - a$, $p - b$, $p - c$, tandis que les formules des sinus et cosinus exigent, outre ces quatre calculs, ceux des trois logarithmes de a, b, c. Ensuite, comme nous l'avons vu plus haut (n° 116), un angle est déterminé avec plus de précision par le logarithme de sa tangente que par le logarithme du cosinus ou du sinus.

Les formules que nous emploierons pour la résolution seront donc les suivantes :

$$[62] \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}, \\ \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}}, \\ \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}. \end{cases}$$

La surface S est donnée par l'égalité

$$S = \frac{bc \sin A}{2} = bc \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2},$$

$$S = bc \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}.$$

En simplifiant, on a donc :

$$[63] \qquad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

formule bien connue en géométrie [1].

[1] Voir dans les *Leçons de Géométrie* de M. Hadamard, le n° 251.

Discussion. — Pour que les valeurs fournies par les formules [**62**] et [**63**] existent, il faut et il suffit que le produit

$$p(p-a)(p-b)(p-c)$$

soit *positif*, c'est-à-dire que le produit

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

soit positif. Soit a le plus grand des trois côtés donnés (ou du moins le côté qui n'est pas inférieur aux deux autres); les facteurs

$$c+a-b \quad \text{et} \quad a+b-c$$

seront certainement positifs puisque

$$a \geqslant b, \quad a \geqslant c.$$

Pour que le produit précédent soit positif, il faut donc et il suffit que l'on ait :

$$b+c-a > 0$$

c'est-à-dire

$$a < b+c.$$

Pour que le problème soit possible, il faut donc et il suffit que *le plus grand* des trois côtés donnés soit inférieur à la somme des deux autres.

Les angles $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$ et $\frac{C}{2}$ étant tous trois compris entre 0° et 90°, les formules [**62**] fourniront une seule valeur pour chacun de ces angles.

Comme *vérification*, on devra avoir

$$A+B+C=180°.$$

Calcul pratique. — Au point de vue du calcul pratique, on dispose les formules de la manière suivante.

Posons

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},$$

on aura :

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}, \quad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}, \quad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r}{p-c};$$

$$S = pr.$$

Il sera inutile de calculer r. On calculera uniquement son *logarithme* et on aura :

$$log \operatorname{tg}\frac{A}{2} = log\, r + colog\,(p-a),$$

$$log \operatorname{tg}\frac{B}{2} = log\, r + colog\,(p-b),$$

$$log \operatorname{tg}\frac{C}{2} = log\, r + colog\,(p-c),$$

$$log\, S = log\, r + log\, p.$$

161. Rayons des cercles inscrits. — La quantité r que nous avons introduite plus haut, dans le calcul pratique, a une signification géométrique simple : c'est *le rayon du cercle inscrit dans le triangle.*

Soit, en effet (*fig.* 43), O le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. Joignons ce centre aux trois sommets. La surface S du triangle est, bien évidemment, la somme des surfaces des trois triangles OAB, OAC, OBC. Ces trois triangles ont tous même hauteur qui est le rayon r du cercle inscrit. Leurs surfaces sont donc $\frac{cr}{2}, \frac{br}{2}, \frac{ar}{2}$.

On a, par suite,

$$S = \frac{ar + br + cr}{2} = \frac{a+b+c}{2}\, r = pr.$$

Or, comme nous l'avons vu,

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

on a donc :

$$[64] \qquad r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

On calculerait, de la même façon, les rayons des cercles inscrits. Soit, en effet, O′ le centre du cercle ex-inscrit dans l'angle A; joignons O′ aux trois sommets. On a évidemment :

$$S = surf.\ O'AC + surf.\ O'AB - surf.\ O'BC.$$

Or, les trois triangles O′AC, O′AB, O′BC ont même hauteur qui est le rayon r_a du cercle ex-inscrit O′; on a donc :

$$S = \frac{b\,r_a}{2} + \frac{c\,r_a}{2} - \frac{a\,r_a}{2} = \frac{b+c-a}{2}\,r_a,$$

$$S = (p-a)\,r_a.$$

On en tire :

$$r_a = \frac{S}{p-a} = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}.$$

On trouverait, de même,

$$r_b = \frac{S}{p-b} = \sqrt{\frac{p(p-c)(p-a)}{p-b}},$$

$$r_c = \frac{S}{p-c} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}},$$

r_b et r_c étant les rayons des cercles ex-inscrits dans les angles B et C.

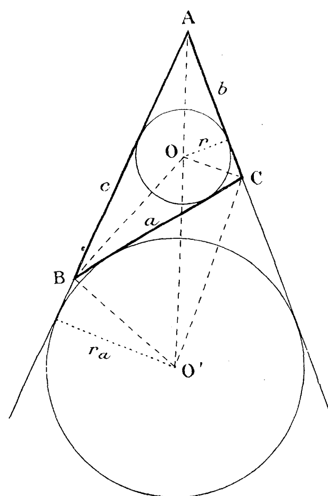


Fig. 43.

162. Rayon du cercle circonscrit. — Les formules précédentes permettent de calculer aisément le rayon R du cercle circonscrit, en fonction des trois côtés.

On a, en effet (n° 149),

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}.$$

On en tire, en remplaçant $\sin\frac{A}{2}$ et $\cos\frac{A}{2}$ par leurs valeurs,

$$R = \frac{a}{4\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}}$$

et, enfin,

[65] $$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} = \frac{abc}{4S}.$$

163. Disposition pratique des calculs. — Pratiquement, on dispose encore les calculs comme nous l'avons fait dans le cas des triangles rectangles. On fait deux colonnes. L'une, dans laquelle on inscrit tous les calculs auxiliaires; l'autre, dans laquelle on place les calculs définitifs.

Voici quatre exemples de calcul. J'ai, dans ces quatre cas, pris le *même* triangle. Ainsi, chaque cas sert de vérification à l'autre.

On remarquera que c'est le troisième cas (cas douteux) qui donne la solution la moins précise. Cela tient à ce que, dans ce cas, l'angle B, dont le calcul sert pour celui des autres inconnues, est donné par son *sinus;* il est donc moins bien déterminé que dans les autres cas où il est donné par sa tangente (voir n° 116). Ce troisième cas a, d'ailleurs, deux solutions que j'ai calculées toutes deux.

On pourra, comme exercice, refaire le calcul du deuxième cas en employant, pour déterminer a, la formule (3) (page 197) au lieu de la formule (4) (page 198), que j'ai appliquée.

Enfin, dans chacun des quatre cas, on pourra calculer la surface du triangle. En particulier, dans le quatrième cas, on pourra chercher les rayons des cercles inscrits et ex-inscrits et celui du cercle circonscrit.

Premier cas.

Données..... $a = 4583{,}635$, $B = 76°\,32'\,47'',26$, $C = 43°\,18'\,6'',48$.

Inconnues... $A = 60°\,9'\,6'',26$, $b = 5139{,}646$, $c = 3624{,}440$.

$$A = 180° - (B + C),\qquad b = \frac{a \sin B}{\sin A},\qquad c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Calculs auxiliaires.

1° *Calcul de log* a.

pour 45836	6612067		$\Delta = 95$.
pour 0,3		28,5	
pour 0,05		4,8	

log $a = 3{,}6612100$.

2° *Calcul de log* sin B.

pour 76° 32′ 40″	$\bar{1}{,}9879123$		$\Delta = 50$.
pour ...... 7″		35	
pour ...... 0″,2		1	
pour 0,06		0,3	

log sin B $= \bar{1}{,}9879159$.

3° *Calcul de log* sin C.

pour 43° 18′ 0″	$\bar{1}{,}8362091$		$\Delta = 223$.
pour ...... 6″		133,8	
pour ...... 0″,4		8,92	
pour ...... 0″,08		1,784	

log sin C $= \bar{1}{,}8362236$.

4° *Calcul de colog* sin A.

pour 60° 9′ 0″	$\bar{1}{,}9381851$		$\Delta = 121$.
pour ...... 6″		72,6	
pour ...... 0″,2		2,42	
pour ...... 0″,06		0,726	

log sin A $= \bar{1}{,}9381927$,
colog sin A $= 0{,}0618073$.

Calculs définitifs.

1° *Calcul de* A.

180°
B + C = 119° 50′ 53″,74

A = 60° 9′ 6″,26.

2° *Calcul de* b.

log $a = 3{,}6612100$
log sin B $= \bar{1}{,}9879159$
colog sin A $= 0{,}0618073$

log $b = 3{,}7109332$

pour 7109293	51396		$\Delta = 85$.
diff. = 39			
pour 34		0,4	
diff. = 5			
pour 5		0,06	

$b = 5139{,}646$.

3° *Calcul de* c.

log $a = 3{,}6612100$
log sin C $= \bar{1}{,}8362236$
colog sin A $= 0{,}0618073$

log $c = 3{,}5592409$

pour 5592361	36244		$\Delta = 120$.
diff. = 48			
pour 48		0,40	

$c = 3624{,}440$.

Deuxième cas.

Données..... $\begin{cases} b = 5139{,}646, \\ c = 3624{,}440, \\ A = 60^\circ 9' 6'',26. \end{cases}$ | **Inconnues...** $\begin{cases} B = 76^\circ 32' 47'',25, \\ C = 43^\circ 18' \ 6'',49, \\ a = 4583{,}634. \end{cases}$

$$\frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\operatorname{cotg}\frac{A}{2}, \quad a = \frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}.$$

Calculs auxiliaires.

$b + c = 8764{,}086,$
$b - c = 1515{,}206.$

1° *Calcul de log* (b + c).

pour	87640	9427024	$\Delta = 49.$
pour	 0,8	39,2	
pour	 0,06	2,94	

$\log(b+c) = 3{,}9427066,$
$\operatorname{colog}(b+c) = \bar{4}{,}0572934.$

2° *Calcul de log* (b + c).

pour	15152	1804700	$\Delta = 286.$
pour	 0,06	17,16	

$\log(b-c) = 3{,}1804717.$

3° *Calcul de log* $\operatorname{cotg}\frac{A}{2}$.

pour	$30^\circ\ 4'40''$	0,2372002	$\Delta = 485.$
pour	...... $6''$	291	
pour	...... $0'',8$	38,8	
pour	..... $0'',07$	3,395	

$\log \operatorname{cotg}\frac{A}{2} = 0{,}2372335.$

4° *Calcul de log* $\sin\frac{A}{2}$.

pour	$30^\circ\ 4'30''$	$\bar{1}{,}6999532$	$\Delta = 363.$
pour	...... $3''$	108,9	
pour	...... $0'',1$	3,63	
pour	...... $0'',03$	1,089	

$\log \sin\frac{A}{2} = \bar{1}{,}6999646.$

5° *Calcul de colog* $\cos\frac{B-C}{2}$.

pour	$16^\circ 37' 30''$	$\bar{1}{,}9814552$	$\Delta = 63.$
pour	... $-\ 9''$	56,7	
pour	... $-\ 0'',6$	3,78	
pour	... $-\ 0'',02$	0,126	

$\log\cos\frac{B-C}{2} = \bar{1}{,}9814613,$
$\operatorname{colog}\cos\frac{B-C}{2} = 0{,}0185387.$

Calculs définitifs.

1° *Calcul de* $\frac{B+C}{2}$.

90°
$\frac{A}{2} = 30^\circ\ 4'33'',13$
$\frac{B+C}{2} = 59^\circ 55' 26'',87.$

2° *Calcul de* $\frac{B-C}{2}$.

$\log(b-c) = 3{,}1804717$
$\operatorname{colog}(b+c) = \bar{4}{,}0572934$
$\log\operatorname{cotg}\frac{A}{2} = 0{,}2372335$
$\log\operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \bar{1}{,}4749986$

pour	$\bar{1}{,}4749957$	$16^\circ 37' 20''$	$\Delta = 768.$
diff. =	29		
pour	23,0	$0'',3$	
diff. =	6		
pour	6	$0'',08$	

$\frac{B-C}{2} = 16^\circ 37' 20'',38.$

3° *Calcul de* a.

$\log(b+c) = 3{,}9427066$
$\log\sin\frac{A}{2} = \bar{1}{,}6999646$
$\operatorname{colog}\cos\frac{B-C}{2} = 0{,}0185387$
$\log a = 3{,}6612099$

pour	6612067	45836	$\Delta = 95.$
diff. =	32		
pour	28,5	0,3	
diff. =	3,5		
pour	3,8	0,04	

$a = 4583{,}634.$

Troisième cas.

Données.... $\begin{cases} a = 4583{,}635, \\ b = 5139{,}646, \\ A = 60^\circ 9' 6'',26. \end{cases}$

Inconnues (*Première solution*) $\begin{cases} B = 76^\circ 32' 47'',20, \\ C = 43^\circ 18' 6'',54, \\ c = 3624{,}441. \end{cases}$

Inconnues (*Deuxième solution*) $\begin{cases} B = 103^\circ 27' 12'',80, \\ C = 16^\circ 23' 40'',94, \\ c = 1491{,}617. \end{cases}$

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}, \qquad C = 180^\circ - (A + B), \qquad c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Calculs auxiliaires.

1° *Calcul de log a.*

pour 45836	6612067		Δ = 95.
pour 0,3	28,5		
pour 0,05	4,8		

log a = 3,6612100,
colog a = $\bar{4}$,3387900.

2° *Calcul de log b.*

pour 51396	7109293	Δ = 85.
pour 0,4	34	
pour 0,06	5,1	

log b = 3,7109332.

3° *Calcul de log* sin A.

pour 60° 9′ 0″	$\bar{1}$,9381851	Δ = 121.
pour ...... 6″	72,6	
pour ...... 0″,2	2,42	
pour ...... 0″,06	0,726	

log sin A = $\bar{1}$,9381927,
colog sin A = 0,0618073.

4° *Calcul de log* sin C (1re *sol.*).

pour 43° 18′ 0″	$\bar{1}$,8362091	Δ = 223.
pour ...... 6″	133,8	
pour ...... 0″,5	11,15	
pour ...... 0″,04	0,892	

log sin C = $\bar{1}$,8362237.

5° *Calcul de log* sin C (2e *sol.*).

pour 16° 23′ 40″	$\bar{1}$,4506315	Δ = 716.
pour ...... 0″,9	64,44	
pour ...... 0″,04	2,864	

log sin C = $\bar{1}$,4506382.

Calculs définitifs.

1° *Calcul de* B.

log b = 3,7109332
colog a = $\bar{4}$,3387900
log sin A = $\bar{1}$,9381297

log sin B = $\bar{1}$,9879159

pour $\bar{1}$,9879123	76° 32′ 40″	Δ = 50.
diff.. = 36		
pour 35	7″	
diff.. = 1		
pour 1	0″,20	

(1re *sol.*) B = 76° 32′ 47″,20;
(2e *sol.*) B = 103° 27′ 12″,80.

2° *Calcul de* C.

180°
(1re *sol.*) A + B = 136° 41′ 53″,46

(1re *sol.*) C = 43° 18′ 6″,54;

180°
(2^e^ *sol.*) A + B = 163° 36′ 19″,06

(2^e^ *sol.*) C = 16° 23′ 40″,94.

3° *Calcul de c* (1re *sol.*).

log a = 3,6612100
log sin C = $\bar{1}$,8362237
colog sin A = 0,0618073

loc c = 3,5592410

pour 5592361	36244	Δ = 120.
diff.. = 49		
pour 48	0,4	
diff.. = 1		
pour 1	0,01	

c = 3624,441.

4° *Calcul de c.* (2e *sol.*).

log a = 3,6612100
log sin C = $\bar{1}$,4506382
colog sin A = 0,0618073

log c = 3,1736555

pour 1736524	14916	Δ = 291.
diff.. = 31		
pour 29,1	0,1	
diff.. = 1,9		
pour 2	0,07	

c = 1491,617.

Quatrième cas.

Données..... $a = 4583{,}635$, $b = 5139{,}646$, $c = 3624{,}440$.

Inconnues... A = 60° 9′ 6″,26, B = 76° 32′ 47″,26, C = 43° 18′ 6″,46.

Vérification A + B + C = 179° 59′ 59″,98.

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}, \quad \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}, \quad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}, \quad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r}{p-c}.$$

Calculs auxiliaires.

$2p = 13347{,}721$,
$p = 6673{,}860$,
$p - a = 2090{,}225$,
$p - b = 1534{,}214$,
$p - c = 3049{,}420$.

1° *Calcul de colog p.*

pour	66738	8243732	Δ = 65.
pour	0,6	39	

log p = 3,8243771,
colog p = $\bar{4}$,1756229.

2° *Calcul de log (p — a).*

pour	20902	3201878	Δ = 208.
pour	0,2	41,6	
pour	0,05	10,4	

log (p — a) = 3,3201930,
colog (p — a) = $\bar{4}$,6798070.

3° *Calcul de log (p — b).*

pour	15342	1858820	Δ = 283.
pour	0,1	28,3	
pour	0,04	11,3	

log (p — b) = 3,1858860,
colog (p — b) = $\bar{4}$,8141140.

4° *Calcul de log (p — c).*

pour	30494	4842144	Δ = 142.
pour	0,2	28.4	

log (p — c) = 3,4842172,
colog (p — c) = $\bar{4}$,5157828.

5° *Calcul de log r.*

log (p — a) = 3,3201930
log (p — b) = 3,1858860
log (p — c) = 3,4842172
colog p = $\bar{4}$,1756229

2 *log r* = 6,1659191
log r = 3,0829595.

Calculs définitifs.

1° *Calcul de* A.

log r = 3,0829595
colog (p — a) = $\bar{4}$,6798070

log tg $\frac{A}{2}$ = $\bar{1}$,7627665

pour $\bar{1}$,7627513		30° 4′ 30″	Δ = 485.
diff. = 152			
pour	145,5	3″	
diff. =	6,5		
pour	4,85	0″,1	
	1,65		
pour	1,45	0″,03	

$\frac{A}{2}$ = 30° 4′ 33″,13
A = 60° 9′ 6″,26.

2° *Calcul de* B.

log r = 3,0829595
colog (p — b) = $\bar{4}$,8141140

log tg $\frac{B}{2}$ = $\bar{1}$,8970735

pour $\bar{1}$,8970580		38° 16′ 20″	Δ = 433.
diff. = 155			
pour	129	3″	
diff. =	26		
pour	25	0″,6	
diff. =	1		
pour	1	0″03	

$\frac{B}{2}$ = 38° 16′ 23″,63
B = 76° 32′ 47″,26.

3° *Calcul de* C.

log r = 3,0829595
colog (p — c) = $\bar{4}$,5157828

log tg $\frac{C}{2}$ = $\bar{1}$,5987423

pour $\bar{1}$,5987225		21° 39′ 0″	Δ = 614.
diff. = 198			
pour	184,2	3″	
	13,8		
pour	12,28	0″,2	
	1,72		
pour	1,84	0″,03	

$\frac{C}{2}$ = 21° 39′ 3″,23
C = 43° 18′ 6″,46.

164. Cas non classiques. — Un triangle quelconque est déterminé lorsqu'on se donne trois quantités indépendantes (dont au moins une longueur) liées à ce triangle. On peut, par exemple, se donner le périmètre et deux angles ; les trois hauteurs, etc...

Pour résoudre le triangle, avec de telles données, on exprimera chacune des données en fonction des éléments du triangle et, en adjoignant à ces relations trois des relations [**58**] *ou* [**59**] *convenablement choisies, on aura un système d'équations en nombre suffisant pour calculer les éléments inconnus.*

Nous allons traiter quelques exemples de ce genre.

165. Problème. — *Résoudre un triangle connaissant le périmètre* $2p$ *et les angles* A, B, C.

Il est bien clair qu'il suffit de se donner deux angles et que le troisième est déterminé par la relation

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} = 180^\circ.$$

Nous avons, d'abord,

$$(1) \qquad 2p = a + b + c.$$

A cette égalité adjoignons le système

$$(2) \qquad \frac{a}{\sin \mathrm{A}} = \frac{b}{\sin \mathrm{B}} = \frac{c}{\sin \mathrm{C}}$$

et nous avons là trois équations pour déterminer les trois inconnues a, b, c.

Du système (2) on tire :

$$\frac{a}{\sin \mathrm{A}} = \frac{2p}{\sin \mathrm{A} + \sin \mathrm{B} + \sin \mathrm{C}}.$$

Or, la somme $\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C}$ étant égale à 180°, on a, comme nous l'avons vu (nº 93 (3)),

$$\sin \mathrm{A} + \sin \mathrm{B} + \sin \mathrm{C} = 4 \cos \frac{\mathrm{A}}{2} \cos \frac{\mathrm{B}}{2} \cos \frac{\mathrm{C}}{2}.$$

On a donc :

$$\frac{a}{2 \sin \frac{\mathrm{A}}{2} \cos \frac{\mathrm{A}}{2}} = \frac{2p}{4 \cos \frac{\mathrm{A}}{2} \cos \frac{\mathrm{B}}{2} \cos \frac{\mathrm{C}}{2}};$$

d'où on tire :

$$a = \frac{p \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}.$$

On trouverait, de même,

$$b = \frac{p \sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2}},$$

$$c = \frac{p \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}}.$$

Ces formules, calculables par logarithmes, résolvent la question qui est toujours possible puisque les valeurs trouvées pour a, b, c, sont positives. La surface S du triangle est donnée par la formule

$$S = \frac{bc \sin A}{2} = bc \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2},$$

d'où

$$S = p^2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

166. Problème. — *Résoudre un triangle connaissant un angle* A, *la longueur* β *de la bissectrice de cet angle et la hauteur* h *issue du sommet de cet angle.*

Soient ABC (*fig.* 44) le triangle, AD la bissectrice de l'angle A, AH la hauteur.

Dans les triangles ABD et ACD on a :

$$BD = \frac{\beta \sin \frac{A}{2}}{\sin B},$$

$$CD = \frac{\beta \sin \frac{A}{2}}{\sin C};$$

or, comme

$$BD + CD = a,$$

on en conclut, en ajoutant,

$$(1)\qquad a \sin B \sin C = \beta \sin \frac{A}{2} (\sin B + \sin C).$$

D'autre part, on a dans le triangle rectangle AHC

$$(2)\qquad b \sin C = h.$$

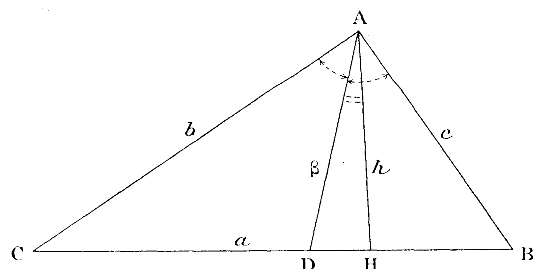


Fig. 44.

Adjoignons à ces deux égalités le système

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}, \\ A + B + C = 180^\circ; \end{cases}$$

et nous avons un système de cinq équations à cinq inconnues pour calculer B, C, a, b, c.

Calculons d'abord B et C. On a, en divisant membre à membre (1) et (2) et tenant compte de (3),

$$\frac{\sin A \sin B \sin C}{\sin B \sin C} = \frac{\beta}{h} \sin \frac{A}{2} (\sin B + \sin C)$$

ou

$$2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \frac{\beta}{h} 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}.$$

Si on remarque que

$$\sin \frac{B+C}{2} = \cos \frac{A}{2},$$

cette dernière relation se simplifie encore et donne :

$$(4) \qquad \cos\frac{B-C}{2} = \frac{h}{\beta}.$$

Comme on a, d'ailleurs,

$$(5) \qquad \frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2},$$

on a ainsi deux équations pour calculer $\frac{B-C}{2}$ et $\frac{B+C}{2}$. Dès qu'on connaît les angles, on a les côtés; car on a, d'après (2),

$$b = \frac{h}{\sin C}, \quad c = \frac{h}{\sin B};$$

puis, d'après (3),

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{h \sin A}{\sin B \sin C}.$$

Discussion. — Pour que le problème soit possible, il faut que la valeur fournie pour $\cos\frac{B-C}{2}$ par la formule (4) soit plus petite que 1. Il faut donc avoir

$$(6) \qquad h \leqslant \beta;$$

ce qui était évident géométriquement.

Cette condition remplie, il existera un angle φ, donné par les tables, tel que

$$\cos\varphi = \frac{h}{\beta}.$$

Nous pouvons toujours appeler B celui des deux angles inconnus qui est le plus grand; $\frac{B-C}{2}$ sera alors positif et plus petit que 90°; on devra donc prendre

$$\frac{B-C}{2} = \varphi.$$

On aura donc :

$$B = 90° - \frac{A}{2} + \varphi,$$

$$C = 90° - \frac{A}{2} - \varphi.$$

La valeur de B est acceptable ; car c'est la somme de deux angles $90° - \frac{A}{2}$ et φ tous deux positifs et plus petits que 90°. Pour que la valeur de C soit acceptable, il faut que l'on ait :

$$90° - \frac{A}{2} > \varphi.$$

Or, les angles $90° - \frac{A}{2}$ et φ étant compris entre 0° et 90°, sont rangés dans l'ordre inverse de leurs cosinus. Il suffit donc que l'on ait :

$$\sin\frac{A}{2} < \cos\varphi$$

ou

$$\sin\frac{A}{2} < \frac{h}{\beta}$$

ou, enfin,

$$(7) \qquad h > \beta \sin\frac{A}{2}$$

Les conditions (6) et (7) sont les seules à remplir; car lorsqu'elles sont vérifiées, les angles sont compris entre 0° et 180° et les valeurs de a, b, c sont positives, ce qui suffit comme nous le savons (n° 154).

En résumé, pour que le problème soit possible, il faut que l'on ait :

$$\beta \sin\frac{A}{2} < h \leqslant \beta,$$

et cela suffit.

Remarque. — La relation (4)

$$\cos\frac{B - C}{2} = \frac{h}{\beta}$$

est facile à établir directement par des considérations géométriques. Il suffit, en effet, d'évaluer l'angle $\widehat{\text{DAH}}$ (*fig.* 44) et de montrer que cet angle est égal à $\frac{B-C}{2}$. On a, alors, dans le triangle rectangle DAH,

$$h = \beta \cos(\widehat{\text{DAH}}) = \beta \cos \frac{B-C}{2}.$$

167. Problème. — *Résoudre un triangle connaissant les trois hauteurs.*

Soient h, h', h'' les trois hauteurs relatives, respectivement, aux côtés a, b, c. On a, de suite, en égalant les trois valeurs de la surface :

$$ah = bh' = ch''$$

ou

$$(1) \qquad \frac{a}{\left(\frac{1}{h}\right)} = \frac{b}{\left(\frac{1}{h'}\right)} = \frac{c}{\left(\frac{1}{h''}\right)}.$$

A cause de la proportionnalité des sinus aux côtés, on en conclut

$$(2) \qquad \frac{\sin A}{\alpha} = \frac{\sin B}{\beta} = \frac{\sin C}{\gamma},$$

en posant

$$\frac{1}{h} = \alpha, \quad \frac{1}{h'} = \beta, \quad \frac{1}{h''} = \gamma.$$

Les relations (2) prouvent, alors, que A, B, C sont les angles d'un triangle dont les côtés sont α, β, γ.

Si donc l'on pose :

$$2\omega = \alpha + \beta + \gamma$$

et

$$\rho = \sqrt{\frac{(\omega-\alpha)(\omega-\beta)(\omega-\gamma)}{\omega}},$$

il suffira d'appliquer les formules [**62**] du quatrième cas classique et on aura :

$$(3) \qquad \operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{\rho}{\omega-\alpha}, \quad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{\rho}{\omega-\beta}, \quad \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{\rho}{\omega-\gamma}.$$

Connaissant les angles, il serait facile d'avoir les côtés; mais on peut obtenir aussi les côtés au moyen des données.

On a, en effet,

$$\alpha\beta \sin C = 2\,\omega\rho,$$

en exprimant de deux manières différentes la surface du triangle auxiliaire. D'autre part,

$$\frac{1}{\alpha} = h = b \sin C;$$

on en tire :

$$b = \frac{1}{\alpha \sin C} = \frac{\beta}{2\,\omega\rho}.$$

On a donc, pour déterminer les côtés, les formules simples :

$$(4 \qquad a = \frac{\alpha}{2\,\omega\rho}, \quad b = \frac{\beta}{2\,\omega\rho}, \quad c = \frac{\gamma}{2\,\omega\rho}.$$

Discussion. — Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit qu'on puisse avec les trois données α, β, γ résoudre le quatrième cas classique ; il faut donc et il suffit que la plus grande des quantités α, β, γ soit plus petite que la somme des deux autres. Ceci revient à dire qu'il faut et qu'il suffit que l'inverse de la plus petite hauteur soit plus petit que la somme des inverses des deux autres hauteurs.

Il faut remarquer que les formules (3) et (4) ne sont calculables par logarithmes que si on suppose qu'on a calculé directement les inverses α, β, γ des trois hauteurs et, par suite, ω.

168. Remarques générales. — La résolution d'un triangle, comme nous l'avons expliqué (nº 164), conduit toujours à résoudre un système d'équations à 3, 4, 5, ou 6 inconnues, suivant le nombre des éléments inconnus. On ne peut, évidemment, pas donner de règle générale pour résoudre de pareils systèmes; mais on peut donner quelques conseils qui auront souvent leur utilité.

D'abord, il sera, *en général*, préférable de calculer *les angles* inconnus *en premier*. Les angles étant connus, les côtés s'en déduisent aisément.

Cette façon de procéder conduira, généralement, à des formules d'un maniement plus commode et plus faciles à discuter.

Lorsque deux inconnues entreront *symétriquement* dans les équations on aura avantage, d'ordinaire, à chercher leur *somme* et

leur *différence* plutôt qu'à chercher ces quantités elles-mêmes par des formules directes. Ainsi, si les deux angles inconnus B et C entrent symétriquement, et que A est connu, on connaît B + C, on cherchera donc à trouver B — C.

Si, sur les trois angles, deux d'entre eux, B et C, entrent symétriquement et que le troisième A joue un rôle spécial, il y aura, en général, avantage à calculer d'abord A. Il ne restera plus qu'à trouver B — C.

Le lecteur se rendra compte aisément que, dans toutes les questions que nous avons traitées jusqu'ici, ces préceptes ont été appliqués avec fruit.

Illustrons encore ceci par des exemples :

169. Exemple I. — *Résoudre un triangle connaissant le côté* a, *l'angle* A *et la somme* s *des deux autres côtés.*

D'après ce que nous avons dit, nous devons, ici, calculer, d'abord, B — C. Or, nous avons vu (n° 158, formule (4)), que

$$a = \frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}};$$

on a donc, de suite,

$$\cos\frac{B-C}{2} = \frac{s\sin\frac{A}{2}}{a}$$

ce qui, avec

$$\frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2},$$

donne B et C.

De même, b et c entrant symétriquement, comme nous connaissons $b+c$,

$$b+c=s,$$

nous calculerons $b-c$. La formule (5) du n° 158 (Rem. III) nous donne, de suite,

$$b-c = \frac{a\sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

qui fournit $b-c$ lorsqu'on a calculé $\frac{B-C}{2}$.

Le problème est ainsi résolu par des formules calculables par logarithmes.

La discussion se fait sans difficulté.

170. Exemple II. — *Résoudre un triangle connaissant un côté* a, *la somme* s *des deux autres côtés et la hauteur* h *relative au côté donné* a.

D'après les conseils précédents, on devra d'abord calculer les angles et, comme A joue un rôle spécial, commencer par le calcul de A.

On a, d'après les formules du quatrième cas classique (n° 160),

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a}\cdot$$

r et p sont faciles à calculer. On a, en effet,

$$2p=a+s$$

et, en évaluant de deux manières différentes la surface du triangle,

$$\frac{ah}{2}=pr.$$

On en tire :

$$p=\frac{a+s}{2},$$

$$r=\frac{ah}{a+s}\cdot$$

On a donc, de suite, A :

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{2ah}{(s+a)(s-a)}\cdot$$

Dès qu'on a calculé A on est ramené au cas de l'exemple précédent et la résolution se termine par l'emploi des formules successives :

$$\left\{\begin{aligned}\cos\frac{B-C}{2}&=\frac{s\sin\frac{A}{2}}{a},\\ \frac{B+C}{2}&=90^\circ-\frac{A}{2};\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}b+c&=s,\\ b-c&=\frac{a\sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\cdot\end{aligned}\right.$$

On peut, d'ailleurs, remplacer la dernière par celle-ci :

$$b-c=\frac{2ahs}{(s+a)(s-a)}\operatorname{tg}\frac{B-C}{2},$$

qui exige un calcul logarithmique de moins.

Il suffit, pour se rendre compte de l'utilité de nos remarques, d'essayer de traiter les exemples qui précèdent, en dirigeant les calculs d'une autre manière.

EXERCICES

60. Démontrer *directement* les formules du n° 158 :

$$a = \frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}, \qquad a = \frac{(b-c)\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B-C}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\operatorname{cotg}\frac{A}{2}.$$

Pour cela, en supposant b plus grand que c, on prendra sur le côté AC et sur son prolongement deux longueurs AD, AE égales à c ; D tombant entre A et C et E sur le prolongement de AC au delà de A, on aura :

$$CD = b - c, \qquad CE = b + c.$$

Dans les deux triangles BCD et BCE, on évaluera les angles opposés aux côtés $BC = a$, CD et CE et il suffira d'écrire la proportionnalité entre les sinus et les angles opposés pour obtenir les relations cherchées.

61. Désignons, comme d'habitude, par S la surface du triangle ABC, par R le rayon du cercle circonscrit et r, r_a, r_b, r_c, les rayons du cercle inscrit et des cercles exinscrits ; prouver les égalités suivantes, où $2p$ désigne le périmètre :

$$p = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2};$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{abc}{\sin A\sin B\sin C}};$$

$$a\cos A + b\cos B + c\cos C = 4R\sin A\sin B\sin C;$$

$$p-a = p\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} \quad p-b = p\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}, \quad p-c = p\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2};$$

$$S = \frac{abc\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{p};$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{R+r}{R};$$

$$4Rpr = abc;$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c};$$

$$4R = r_a + r_b + r_c - r.$$

62. Résoudre un triangle *isoscèle*, connaissant :

1° la hauteur h relative à la base et le périmètre $2p$;

2° l'angle au sommet A et la surface $\frac{1}{2}K^2$;

3° la base a et la surface $\frac{1}{2}K^2$.

63. Résoudre un triangle quelconque, connaissant :

1° a, A et la différence $a - b = d$;
2° a, A et la différence $b - c = d$;
3° a, A et la surface $\frac{1}{2}$ K² ;
4° a, le périmètre $2p$ et la surface $\frac{1}{2}$ K² ;
5° A, et les deux sommes $a + b = m$, $a + c = l$;
6° A, la médiane m et la hauteur h relative au côté opposé ;
7° A, la hauteur h relative au côté opposé à cet angle et la différence d des deux autres hauteurs ;
8° A, et les hauteurs h' h'' relatives aux côtés qui comprennent cet angle ;
9° a, A, et la médiane m relative au côté a ;
10° a, A, et la bissectrice β de l'angle A ;
11° a, la hauteur h relative au côté a et la bissectrice β de l'angle opposé A ;
12° a, A et une hauteur h' non relative au côté a ;
13° A, le rayon R du cercle circonscrit et le périmètre $2p$;
14° A et sachant que le volume engendré par le triangle tournant autour de a est moyen géométrique entre les deux volumes engendrés par le triangle lorsqu'il tourne, successivement, autour des deux autres côtés ;
15° les rayons des trois cercles exinscrits ;
16° a, A et le rayon r du cercle inscrit ;
17° a, la surface $\frac{1}{2}$ K², et le rayon R du cercle circonscrit ;
18° la somme $2l$ de deux côtés ; la hauteur h relative au troisième côté et le rayon R du rayon circonscrit ;
19° a, A et le produit $bc = m^2$;
20° a, A et la somme $b^2 + c^2 = l^2$;
21° B, C et la somme des inverses des trois hauteurs $\frac{1}{m}$;
22° l'angle A, les rayons R et r du cercle circonscrit et du cercle inscrit.

64. En représentant par α, β, γ les angles sous lesquels on voit du centre du cercle inscrit les côtés du triangle, prouver que l'on a :

$$4 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = \sin A + \sin B + \sin C.$$

(*Saint-Cyr.*)

65. Si dans un triangle on a :

$$b - a = nc,$$

prouver que l'on a :

$$\cos\left(A + \frac{C}{2}\right) = n \cos\frac{C}{2}, \qquad \operatorname{cotg}\frac{B - A}{2} = \frac{1 + n\cos B}{n \sin B}.$$

66. r étant le rayon du cercle inscrit dans un triangle et $\alpha\,\beta\,\gamma$ les distances de son centre aux trois sommets, montrer que l'on a :

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{r} = \frac{abc}{p},$$

$2p$ étant le périmètre.

CHAPITRE IV

APPLICATIONS DIVERSES

171. Quadrilatère convexe. — Soit ABCD (*fig.* 45) un quadrilatère convexe quelconque.

Désignons par A, B, C, D les angles, mesurés en degrés, et par a, b, c, d les longueurs des côtés,

$$a = \mathrm{AB}, \qquad b = \mathrm{BC}, \qquad c = \mathrm{CD}, \qquad d = \mathrm{DA}.$$

Les quatre angles sont, comme on sait [1], liés par la relation

$$(1) \qquad \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} + \mathrm{D} = 360^{\circ}.$$

En général, un quadrilatère convexe est déterminé dès qu'on se donne cinq des huit éléments a, b, c, d; A, B, C, D, dont au moins deux côtés. Ainsi, un quadrilatère convexe est déterminé lorsqu'on connaît trois côtés consécutifs et les deux angles qu'ils comprennent; et ainsi de suite.

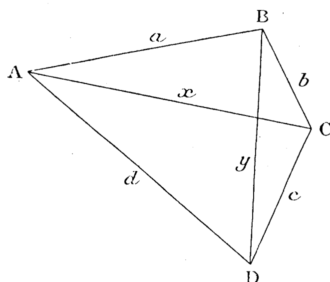


Fig. 45.

On pourra, toujours, au moyen des formules de résolution des triangles, calculer les éléments inconnus. On tracera, pour cela, les deux diagonales

$$x = \mathrm{AC}, \quad y = \mathrm{BD}$$

qui décomposent le quadrilatère en triangles.

En introduisant les diagonales x et y comme inconnues auxiliaires, on sera ramené à résoudre des triangles.

Supposons, par exemple, *qu'on connaisse les quatre côtés* a, b, c, d *et l'angle* A.

(1) Voir dans les *Leçons de Géométrie* de M. Hadamard, n° 44 *bis*.

On prend comme inconnue auxiliaire la diagonale

$$y = \mathrm{BD}.$$

1° On résoudra le triangle A B D dont on connaît deux côtés a et d et l'angle compris A (deuxième cas classique). On calculera ainsi y et les angles $\widehat{\mathrm{ABD}}$ et $\widehat{\mathrm{ADB}}$.

2° Connaissant y, on sera ramené à résoudre le triangle BDC dont on connaît, alors, les trois côtés b, c, y. On calculera ainsi l'angle C et les deux angles $\widehat{\mathrm{DBC}}$ et $\widehat{\mathrm{CDB}}$ (quatrième cas).

Les trois angles inconnus seront donc, alors, calculés, puisque l'on connaît C et que

$$\mathrm{B} = \widehat{\mathrm{ABD}} + \widehat{\mathrm{DBC}},$$
$$\mathrm{D} = \widehat{\mathrm{ADB}} + \widehat{\mathrm{BDC}}.$$

On agirait de même dans d'autres cas.

Lorsqu'au lieu de se donner des éléments du quadrilatère on se donne certaines *quantités* liées au quadrilatère ou certaines *conditions* restrictives, ces données fourniront des égalités spéciales qu'il faudra joindre aux précédentes pour effectuer la résolution.

En voici des exemples :

1° Si on astreint le quadrilatère à être *circonscriptible* à un cercle, on aura la condition

$$a + c = b + d.$$

2° Si on astreint le quadrilatère à avoir des *diagonales rectangulaires*, on aura la condition :

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2.$$

3° Si le quadrilatère est *inscriptible* dans un cercle, la relation (1), entre les angles, se décompose en deux et on a :

$$\mathrm{A} + \mathrm{C} = 180°,\ \mathrm{B} + \mathrm{D} = 180°;$$

ce qui exprime que les angles opposés sont supplémentaires.

Dans chacun de ces trois cas, le quadrilatère sera parfaitement déterminé dès qu'on se donne seulement *quatre* éléments, pourvu que ces quatre éléments soient *indépendants*.

Ainsi, par exemple, un quadrilatère inscriptible est déterminé lorsqu'on en connaît les quatre côtés. Nous allons, comme exercice, traiter ce problème qui est d'ailleurs classique.

172. Problème. — *Résoudre un quadrilatère convexe, inscriptible, dont on connaît les quatre côtés.*

Les inconnues sont donc, ici, les quatre angles qui sont déjà liés par les deux relations

$$(1) \qquad A + C = 180^\circ, \; B + D = 180^\circ.$$

Pour calculer A, et par suite C, égalons les deux valeurs du carré de la diagonale $y = BD$ (*fig.* 45) considérées comme appartenant, successivement, aux deux triangles ABD et BCD. On a :

$$(1) \qquad y^2 = a^2 + d^2 - 2\,a\,d \cos A,$$
$$(2) \qquad y^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos C.$$

Les angles A et C étant supplémentaires, on a

$$\cos C = -\cos A$$

et, par suite, en égalant (1) et (2),

$$a^2 + d^2 - 2\,a\,d \cos A = b^2 + c^2 + 2\,b\,c \cos A.$$

On tire de là,

$$\cos A = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2\,(a\,d + b\,c)}.$$

Cette valeur de cos A n'étant pas calculable par logarithmes, nous calculerons, comme dans le quatrième cas classique de résolution des triangles (nº 160), les lignes de l'angle moitié. On a :

$$2 \cos^2 \frac{A}{2} = 1 + \cos A = \frac{2\,a\,d + 2\,b\,c + a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2\,(a\,d + b\,c)},$$
$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \cos A = \frac{2\,a\,d + 2\,b\,c - a^2 - d^2 + b^2 + c^2}{2\,(a\,d + b\,c)}.$$

Ceci s'écrit :

$$2 \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{(a + d)^2 - (b - c)^2}{2\,(a\,d + b\,c)} = \frac{(a + d + b - c)\,(a + d - b + c)}{2\,(a\,d + b\,c)},$$
$$2 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{(b + c)^2 - (a - d)^2}{2\,(a\,d + b\,c)} = \frac{(b + c + a - d)\,(b + c - a + d}{2\,(a\,d + b\,c)}.$$

Posons, comme dans le cas du triangle,

$$2\,p = a + b + c + d.$$

On aura :

$$2(p-a)=b+c+d-a,$$
$$2(p-b)=a+c+d-b,$$
$$2(p-c)=a+b+d-c,$$
$$2(p-d)=a+b+c-d.$$

On en conclut

$$(3)\quad \begin{cases} \cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{ad+bc}}, \\ \sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-d)}{ad+bc}}. \end{cases}$$

Ces formules ne sont pas encore calculables par logarithmes; en les divisant, on obtient, enfin,

$$(4)\qquad \operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}},$$

qui est calculable par logarithmes.

Connaissant A, on a C :

$$C=180^\circ-A.$$

On trouverait, de même,

$$(5)\qquad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{(p-c)(p-d)}}$$

qui, avec

$$D=180^\circ-B,$$

donne les angles B et D.

La surface S du quadrilatère est facile à calculer. Cette surface est, en effet, la somme des surfaces des triangles ABD et BCD. Donc :

$$S=\frac{1}{2}(ad\sin A+bc\sin C)=\frac{ad+bc}{2}\sin A,$$

puisque

$$\sin C=\sin A.$$

Or,

$$\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = 2 \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}{(ad+bc)^2}},$$

$$\sin A = 2 \frac{\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ad+bc};$$

par suite,

$$(6) \qquad S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Les formules (4), (5), (6) auxquelles nous parvenons sont tout à fait analogues à celles des triangles, qu'on retrouve, d'ailleurs, en faisant $d = 0$.

Discussion. — Pour que les valeurs (4) et (5) de $\operatorname{tg} \frac{A}{2}$ et $\operatorname{tg} \frac{B}{2}$ existent il faut que le produit

$$(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$$

soit positif; c'est-à-dire que le produit

$$(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d)$$

soit positif. Or, si a est le plus grand des quatre côtés, les trois derniers facteurs sont évidemment positifs; il suffit donc que l'on ait :

$$b+c+d-a > 0$$

ou

$$a < b+c+d.$$

Pour que le problème soit possible il faut donc et il suffit que le plus grand des quatre côtés soit plus petit que la somme des trois autres.

Calcul des diagonales. — Dès qu'on connaît l'angle A, la formule (1) donne la diagonale y. Or, on a

$$\cos A = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad+bc)},$$

on en conclut :

$$y^2 = a^2 + d^2 - ad \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{(ad+bc)},$$

$$y^2 = \frac{(a^2+d^2)bc + ad(b^2+c^2)}{ad+bc},$$

et, enfin,

$$y^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}.$$

On a donc :

$$(7) \qquad y = \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}}.$$

On trouverait, de même,

$$(8) \qquad x = \sqrt{\frac{(ab + cd)(ad + bc)}{ac + bd}}.$$

En multipliant les égalités (7) et (8) membre à membre, on retrouve le théorème de Ptolémée [1]

$$xy = ab + cd,$$

dans un quadrilatère convexe, inscriptible, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés.

De même, en divisant membre à membre ces deux égalités, on a :

$$\frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{ac + bd};$$

ce qui est une autre propriété connue [2] :

Dans un quadrilatère convexe, inscriptible, le rapport des deux diagonales est égal au quotient des sommes des produits des côtés aboutissant respectivement à leurs extrémités.

Calcul du rayon du cercle circonscrit. — Soit R le rayon du cercle circonscrit au quadrilatère. Ce cercle étant circonscrit au triangle ABD, on a (nº 149) :

$$2\,R = \frac{y}{\sin A} = \frac{y}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}.$$

(1) Voir dans les *Leçons de Géométrie* de M. Hadamard, le nº 237.
(2) Voir Hadamard, *loc. cit.*, nº 240.

Remplaçons y, $\sin \frac{A}{2}$ et $\cos \frac{A}{2}$ par leurs valeurs fournies par les formules (3) et (7) et il vient, toutes simplifications faites,

$$R = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}};$$

ce qui peut s'écrire :

$$R = \frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4S}.$$

173. Mesures de hauteurs. — Problème. — *Mesurer la hauteur d'une tour dont le pied est accessible.*

Soit AB la hauteur d'une tour verticale (*fig.* 46) dont le pied A est accessible. Pour mesurer la hauteur AB, on se place en O à une

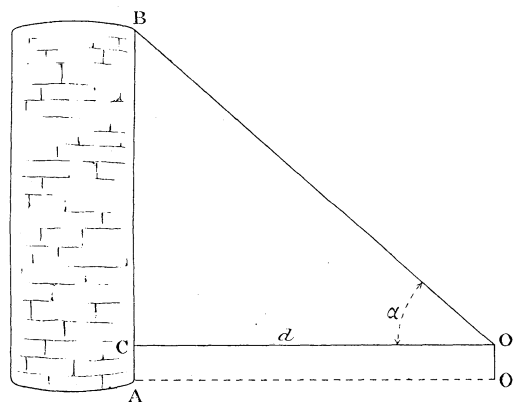


FIG. 46.

certaine distance de la tour. Du point O on vise d'abord un point C, du bas de la tour, situé sur une horizontale passant par O. On vise, ensuite, le point B, du sommet de la tour, situé sur la verticale de C. On mesure, ainsi, l'angle $\widehat{BOC} = \alpha$. On mesure, de même, sur le terrain, la distance $OC = d$ ou la distance égale AO'.

Dans le triangle rectangle BOC on a, alors,

$$BC = OC \sin \widehat{BOC} = d \sin \alpha;$$

la hauteur de la tour s'obtient en ajoutant à BC, que l'on

vient de calculer, la hauteur AC mesurée directement, au pied de la tour.

174. Problème. — *Mesurer la hauteur d'une montagne ou d'une tour dont le pied est inaccessible.*

Soit A le point culminant de la montagne et P le plan horizontal à partir duquel on compte les hauteurs. Soit AH la perpendiculaire (*fig.* 47) abaissée de A sur le plan P. Il s'agit de mesurer AH, H étant inaccessible. A cet effet, on se placera en deux stations B et C, accessibles sur le terrain (peu importe que la droite BC soit horizontale ou non). On mesurera, d'abord, la distance rectiligne $BC = a$. Puis, du point C, en visant, successivement, les points A et B, on mesurera l'angle C du triangle ABC. De même, en visant, du point B,

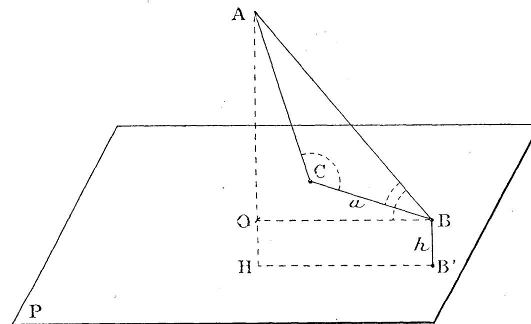


Fig. 47.

les points A et C, on mesurera l'angle B. Ces mesures faites, on connaîtra dans le triangle ABC le côté a et les deux angles adjacents B et C; on pourra donc calculer le côté AB et on aura :

$$AB = \frac{a \sin C}{\sin (B + C)}.$$

Ceci fait, on mesurera l'angle $\widehat{ABO} = \alpha$ que la droite AB fait avec l'horizontale AO située dans le plan vertical HAB en visant, du point B, le point A, puis mesurant l'angle de cette direction avec l'horizontale. Dans le triangle rectangle AOB on connaît l'hypoténuse et l'angle aigu α; on peut donc calculer AO.

$$AO = AB \sin \alpha = \frac{a \sin C \sin \alpha}{\sin (B + C)}.$$

Pour avoir la hauteur AH, il suffira d'ajouter à AO la distance OH ou la distance égale $BB' = h$, que l'on mesurera en la station B. On a donc, finalement,

$$AH = h + \frac{a \sin C \sin \alpha}{\sin(B + C)}.$$

175. Levers de plans. — *Lever le plan* d'une portion de terrain plane, ou sensiblement plane, c'est construire sur une feuille de papier une figure semblable à la figure formée par les points importants du terrain. Lorsque le rapport de similitude de la figure tracée sur le papier (ce qu'on appelle *le plan*) à la figure réelle du terrain est $\frac{1}{n}$, le plan est dit *à l'échelle* de $\frac{1}{n}$.

Pour lever un plan, on suit, d'ordinaire, la marche générale suivante. On choisit, sur le terrain, un certain nombre de points principaux et on imagine que ces points soient reliés par des lignes droites. On décompose ainsi le terrain en un certain nombre de triangles.

Le choix des points doit être fait de telle façon que, dans chacun des triangles, deux quelconques des sommets soient visibles pour un observateur placé au troisième sommet; et que les trois sommets soient visibles de tout point intérieur au triangle.

On commence, alors, par déterminer tous les éléments de tous ces triangles : c'est ce qu'on appelle faire la *triangulation*. Pour pouvoir effectuer cette triangulation, il faut savoir faire, sur le terrain, les mesures suivantes :

1° Mesurer la distance rectiligne de deux points accessibles l'un à l'autre, c'est-à-dire tels qu'on puisse se rendre *directement* de l'un à l'autre. Cette mesure est du ressort de l'arpentage et se fait, ordinairement, avec la *chaîne d'arpenteur*.

2° Mesurer l'angle formé par deux droites AB et AC du terrain (les points B et C étant visibles du point A). Cette mesure se fait, d'ordinaire, avec un appareil appelé le *graphomètre*, en visant, successivement, du point A, les deux points B et C.

La description de ces appareils de mesure et leur usage ne rentre pas dans notre cadre; nous renvoyons, sur ce sujet, le lecteur aux traités spéciaux d'arpentage, de planimétrie ou de topographie [1].

[1] A défaut de traités spéciaux, on pourra consulter un ouvrage encyclopédique; par exemple, le *Dictionnaire des Mathématiques appliquées* de *H. Sonnet* (Hachette et Cie).

Il nous suffira de retenir que ces deux mesures sont *possibles ;* peu nous importera le procédé employé pour les effectuer.

Si tous les sommets des triangles fondamentaux étaient deux à deux accessibles, il suffirait de mesurer *directement* sur le terrain tous les éléments de ces triangles. En fait, les mesures directes des longueurs des côtés des triangles ne sont pas toujours possibles, soit parce que deux sommets sont séparés par un obstacle infranchissable, soit parce que les opérations seraient trop longues ou trop difficiles. Nous sommes donc, ainsi, conduits à traiter deux problèmes préliminaires :

Trouver la distance d'un point accessible à un point inaccessible.

Trouver la distance de deux points inaccessibles.

Ces deux problèmes nous conduiront, alors, à la *triangulation.*

La triangulation effectuée, il nous restera à tracer, sur la carte, les positions des divers points importants situés à l'intérieur des triangles fondamentaux. Cette question sera résolue dans le problème dit *de la carte.*

Nous allons examiner ces diverses questions dans l'ordre où elles se sont présentées.

176. Problème. — *Trouver la distance d'un point accessible à un autre point inaccessible.*

Soit A un point accessible et B un point inaccessible (*fig.* 48), c'est-à-dire un point tel qu'on ne puisse aller en ligne droite de A en B sur le terrain. Nous pouvons, par exemple, supposer A séparé de B par un cours d'eau. Pour mesurer la distance AB, nous choisirons, sur le terrain accessible, un second point C et nous mesurerons directement la distance AC. Puis, par des visées, nous mesurerons les deux angles A et C du triangle ABC; nous connaîtrons ainsi, dans ce triangle, le côté b et les deux angles adjacents. Il nous est donc facile de calculer le côté AB et nous aurons

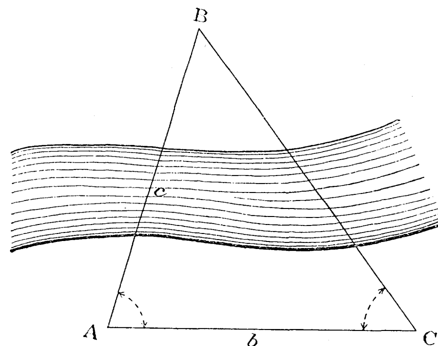


Fig. 48.

$$AB = \frac{b \sin C}{\sin (A + C)}.$$

177. Problème. — *Trouver la distance de deux points inaccessibles.*

Soient A et B (*fig.* 49) deux points inaccessibles; par exemple, deux points séparés du terrain accessible à l'observateur par un cours d'eau. On choisira, alors, deux points C et D sur le terrain accessible et on mesurera, d'abord, directement, la distance $CD = a$. Imaginons qu'on ait joint les quatre points A, B, C, D deux à deux. Par des visées, faites en C et D, on mesurera les quatre angles :

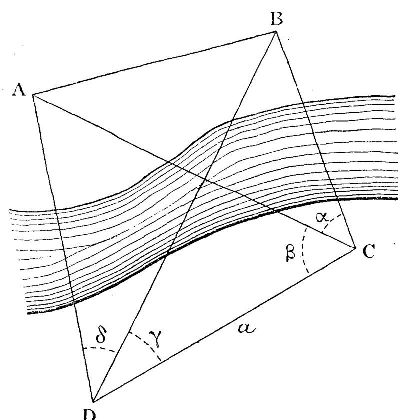


Fig. 49.

$$\widehat{ACB} = \alpha, \ \widehat{ACD} = \beta;$$
$$\widehat{ADB} = \delta, \ \widehat{BDC} = \gamma.$$

Dans les deux triangles ADC et BDC on connaît, alors, le côté $DC = a$ et les angles adjacents ; on pourra donc *calculer* les deux longueurs AC et BC. On aura :

$$AC = \frac{a \sin(\gamma + \delta)}{\sin(\beta + \gamma + \delta)},$$

$$BC = \frac{a \sin \gamma}{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}.$$

AC et BC étant connus, on connaît dans le triangle ABC deux côtés et l'angle compris α; on pourra donc calculer le troisième côté AB en appliquant les formules du deuxième cas classique (n° 158).

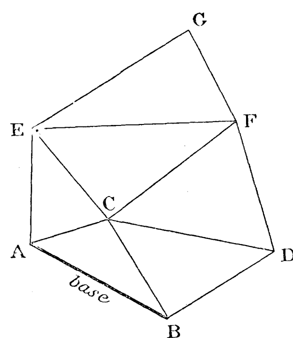


Fig. 50.

178. Triangulation. — Étant donné un terrain dont on veut lever le plan, supposons qu'on ait choisi, sur ce terrain, un certain nombre de points *principaux* A, B, C, D, E, F, G (*fig.* 50). Nous aurons ainsi décomposé la surface en un certain nombre de triangles ABC, BCD, ACE, etc., dont il s'agit de déterminer les éléments.

Pour cela, on choisit une *base d'opération*, c'est-à-dire qu'on prend deux des points A, B, accessibles entre eux, séparés par une étendue aussi plane que possible, et on mesure,

aussi exactement que possible, la distance AB. Ce sera là *la seule* mesure de longueur qu'on effectuera, directement, sur le terrain; aussi y apportera-t-on le plus grand soin.

On se transportera, ensuite, successivement, aux points A, B, C, D, etc., et on mesurera tous les angles des divers triangles. Ces mesures seront possibles puisque, par hypothèse (nº 175), on a choisi les points A, B, C, D, etc., de telle façon que, de chaque sommet d'un triangle, les deux autres sommets soient visibles.

La triangulation se fait, alors, sans difficulté. Dans le premier triangle ABC on connaît le côté AB (base de l'opération) et les angles, on pourra donc *calculer* les deux côtés AC et BC.

Connaissant BC, on connaîtra dans le triangle BCD un côté et les angles; on pourra donc calculer les longueurs BD et CD. Connaissant CD, le triangle CDF sera déterminé; et ainsi de suite. On calculera ainsi, de proche en proche, les éléments de tous les triangles.

Au cours de l'opération il pourra y avoir des vérifications. Ainsi, on pourra calculer le triangle ECF, soit en passant par la suite ABC, AEC, soit en passant par la suite de triangles ABC, BCD, DCF. Les résultats devront être identiques dans les deux cas.

Lorsque le calcul est terminé, on fait une dernière vérification. Pour cela, on mesure, directement, sur le terrain, une des longueurs calculées, plus particulièrement la dernière, GF, par exemple. Il devra y avoir concordance entre le calcul et la mesure.

Remarque. — Au premier abord, tous les calculs précédents peuvent paraître inutiles pour faire le levé du plan. La connaissance des angles des divers triangles suffit, en effet, pour qu'on puisse construire, avec la règle et le compas, tous ces triangles ; mais la construction que l'on ferait ainsi manquerait de précision.

Pour construire des angles il faut, en effet, se servir du *rapporteur* qui, quelque grand qu'il soit, donne toujours des erreurs notables sur les angles. Au contraire, on peut construire une échelle des longueurs sur le papier avec une très grande précision; et, particulièrement, si l'on emploie les échelles dites *obliques*, on peut, avec une très grande exactitude, reporter sur le papier des longueurs données ou décrire des cercles de rayons donnés. C'est pour cette raison que le calcul des longueurs des côtés s'impose.

179. Problème de la carte. — Lorsque la triangulation est faite et qu'on a reproduit, sur le papier, à l'échelle adoptée, des triangles semblables aux triangles fondamentaux, il reste à placer, sur le plan, les autres points du terrain.

Soit, alors, M (*fig.* 51) un point du terrain situé à l'intérieur du triangle ABC. D'après la manière dont les sommets des triangles fondamentaux ont été choisis (n° 175), les trois points A, B, C sont visibles du point M et on pourra, par trois visées effectuées au point M, mesurer les deux angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{AMC}$. Le problème qui se pose donc (et c'est là ce qu'on appelle le *problème de la carte*) est le suivant :

Étant donnés trois points A, B, C, *repérés sur la carte*, *trouver la position d'un lieu* M, *sur la carte*, *sachant que*, *du point* M, *on voit les deux portions de droites* AB *et* AC *sous des angles* γ *et* β.

On a, de suite, une solution géométrique de la question. Il suffit, en effet (*fig.* 51), de décrire sur AB un segment capable de l'angle γ et sur AC un segment capable de l'angle β; ces deux arcs de cercle se couperont, outre au point A, au point M cherché. Le problème admet toujours une solution à moins que les deux arcs de cercle ne soient confondus; dans ce cas, le point M serait indéterminé sur le cercle circonscrit au triangle ABC. Dans la pratique, ceci ne peut pas se présenter puisque le point M que l'on cherche est situé à l'intérieur du triangle ABC.

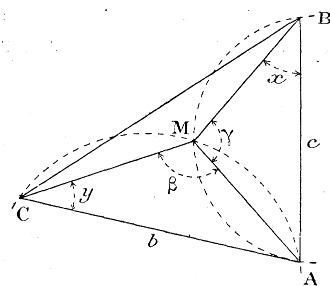


Fig. 51.

Cette solution graphique est insuffisante. La construction d'un segment de cercle capable d'un angle donné exige, en effet [1], des constructions d'angles et, comme nous l'avons dit plus haut, ces tracés manquent de précision. Le point M sera donc bien mieux déterminé si on calcule les trois longueurs MA, MB, MC; car il sera alors à l'intersection des trois cercles décrits de A, B, C comme centres et ayant ces longueurs pour rayons.

Les éléments du triangle ABC étant parfaitement connus, on connaît l'angle A et les côtés $AB = c$, $AC = b$. Pour pouvoir calculer les trois longueurs MA, MB, MC, il suffira de connaître les deux angles

$$\widehat{MBA} = x, \ \widehat{MCA} = y\,;$$

car on connaîtra, alors, dans chacun des triangles ABM et ACM, les trois angles et un côté.

(1) Voir dans les *Leçons de Géométrie* de M. Hadamard, le n° 90, construction 14.

Nous sommes donc ramenés, en dernière analyse, à calculer les deux angles x et y.

En exprimant que la somme des angles des deux triangles ABM et ACM vaut 360°, on a la première relation :

$$(1) \qquad x + y + \beta + \gamma + A = 360°.$$

D'autre part, en exprimant, dans ces deux triangles, la proportionnalité des sinus des angles aux côtés opposés, on a :

$$\frac{\sin x}{AM} = \frac{\sin \gamma}{c},$$

$$\frac{\sin y}{AM} = \frac{\sin \beta}{b}.$$

On en conclut, en divisant membre à membre,

$$(2) \qquad \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b \sin \gamma}{c \sin \beta}.$$

Nous sommes ainsi ramenés, pour calculer x et y, à résoudre un système (1), (2) de forme connue (n° 134). Des équations (1) et (2) on tire, comme nous l'avons montré :

$$(3) \qquad \frac{x+y}{2} = 180° - \left(\frac{\beta + \gamma + A}{2}\right),$$

$$\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \frac{b \sin \gamma - c \sin \beta}{b \sin \gamma + c \sin \beta} \operatorname{tg} \frac{x+y}{2};$$

ou

$$(4) \qquad \operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \frac{c \sin \beta - b \sin \gamma}{c \sin \beta + b \sin \gamma} \operatorname{tg} \left(\frac{\beta + \gamma + A}{2}\right).$$

Les formules (3) et (4) donneront donc $\frac{x+y}{2}$ et $\frac{x-y}{2}$; on en tirera x et y.

Pour que le problème soit possible, il faut que

$$\beta + \gamma + A < 360°.$$

Remarque. — Si l'on avait

$$c \sin \beta = b \sin \gamma$$

ou

(5) $$\frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c},$$

la valeur trouvée pour $\operatorname{tg} \frac{x-y}{2}$ serait, en général, indéterminée. Le premier facteur

$$\frac{c \sin \beta - b \sin \gamma}{c \sin \beta + b \sin \gamma}$$

serait, en effet, nul. Le second $\operatorname{tg}\left(\frac{\beta+\gamma+A}{2}\right)$ serait infiniment grand. Car la condition (5) exprime que les rayons des cercles circonscrits aux triangles ABM et ACM sont égaux et, par suite, elle exprime que le point M est sur le cercle circonscrit au triangle ABC. On aurait, alors,

$$\beta + \gamma + A = 180^\circ,$$
$$\frac{\beta+\gamma+A}{2} = 90^\circ;$$

la tangente de l'angle $\frac{\beta+\gamma+A}{2}$ serait infiniment grande.

Le point M serait bien, dans ce cas, *indéterminé* sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

Comme nous l'avons déjà dit, cette exception ne peut pas se présenter dans la pratique.

En fait, le problème a toujours une solution et une seule.

EXERCICES

67. Résoudre un *quadrilatère inscriptible* connaissant :

1° a, d, A, et sachant que l'angle B est droit ;
2° a, b, c et l'angle B ;
3° Les angles, le périmètre $2p$, et sachant qu'il est, en même temps, circonscriptible ;
4° Le périmètre, le produit des diagonales, et sachant qu'il est circonscrit à un cercle de rayon donné r ;
5° Trois côtés et l'angle que font les deux diagonales ;
6° Les distances du centre du cercle circonscrit aux quatre côtés ;
7° Deux côtés opposés et les diagonales.

68. Résoudre un *trapèze* connaissant :
1° Un angle, la surface, et sachant qu'il est inscrit dans un cercle de rayon donné R ;
2° Les diagonales et les angles ;
3° Les diagonales, la base et la surface.

69. Résoudre un *quadrilatère quelconque*, connaissant :
1° Trois côtés et les angles adjacents au quatrième ;
2° Les côtés et la surface ;
3° Les angles et les diagonales.

70. Un observateur voit, du haut d'une colline, deux bornes kilométriques, consécutives, d'une route horizontale sous des angles de dépression de 5° et 10°. Quelle est la hauteur de la colline? — On admettra que la route et l'observateur sont situés dans un même plan vertical.

71. Une tour verticale est surmontée d'une flèche. Un observateur placé à une distance d du pied de la tour, dans le plan horizontal qui passe par ce pied, a vu la tour sous un angle α et la flèche sous l'angle β. Quelle est la hauteur de la flèche?

72. Une tour de hauteur a est surmontée d'une flèche de hauteur b. A quelle distance du pied de la tour, un observateur doit-il se placer, dans le plan horizontal qui passe par ce pied, pour qu'il voie la flèche sous le plus grand angle possible ?

73. Après avoir trouvé 4° pour la hauteur angulaire d'une tour, un observateur s'avance d'un kilomètre vers la tour ; il trouve alors 5° pour la nouvelle hauteur angulaire. Quelle est la distance qu'il lui reste à parcourir pour arriver au pied de la tour ?

(*École forestière.*)

74. Étant donné un demi-cercle décrit sur AB comme diamètre, déterminer l'angle que doit faire avec AB une corde issue de A pour que, lorsqu'on fait tourner la figure autour du diamètre, le volume engendré par le segment circulaire détaché par la corde, soit égal à la moitié du volume de la sphère engendrée par le demi-cercle.

75. Démontrer que si α est l'angle des tangentes communes à deux cercles on a :

$$(R + R')^2 \sin \alpha = 4 (R - R') \sqrt{R R'},$$

R et R′ étant les rayons des deux cercles.

76. Démontrer que, dans un parallélépipède circonscrit à une sphère, chacune des trois arêtes est proportionnelle au sinus de l'angle des deux autres.

(*Concours général.*)

77. On donne un cercle et un carré circonscrit ; trouver une relation entre les tangentes des angles sous lesquels les deux diagonales du carré sont vues d'un point de la circonférence.

(*Concours général.*)

78. Étant donné un triangle ABC, on demande de mener par le sommet C une droite CD telle que la somme des projections des côtés AC et BC sur cette droite soit égale à une longueur donnée. — Discuter.

79. Trouver le rectangle maximum inscrit dans un secteur circulaire de rayon R et d'angle donné α.

(*Saint-Cyr.*)

80. Un cône, dont l'angle au sommet est 2α, est circonscrit à une sphère de rayon R. Calculer le rapport du volume du cône compris entre la sphère et son sommet au volume de la sphère entière.

81. On considère un tétraèdre régulier :

1° Calculer l'angle dièdre formé par deux faces ;

2° Calculer l'angle formé par une arête avec le plan de l'une des deux faces qui ne la contient pas.

82. Calculer la tangente de l'angle que forment les diagonales d'un parallélépipède rectangle dont la hauteur est h et la base un carré de côté a.

83. Calculer le sinus de l'angle formé par les diagonales d'un cube.

APPENDICE

CHAPITRE PREMIER

REPRÉSENTATION TRIGONOMÉTRIQUE DES IMAGINAIRES

180. Représentation géométrique d'une imaginaire (1). — Soit $a + bi$ une quantité complexe, dans laquelle i désigne l'unité complexe telle que

$$i^2 = -1.$$

Traçons, dans un plan (*fig.* 52), deux axes rectangulaires $x'ox$ et $y'oy$, les deux directions positives de ces axes étant ox et oy. Le sens positif des rotations, dans le plan, sera le sens f dans lequel il faut faire tourner la demi-droite ox pour l'amener à coïncider avec la demi-droite oy en décrivant un angle droit. Marquons, dans ce plan, le point M dont les coordonnées (2) sont a et b, c'est-à-dire le point M tel que les projections orthogonales $\overline{\text{OP}}$ et $\overline{\text{OQ}}$ du vecteur (OM) sur les axes soient égales à a et b :

$$\overline{\text{OP}} = a, \quad \overline{\text{OQ}} = b.$$

Le point M est dit *le point représentatif de l'imaginaire* $a + bi$ et, réciproquement, la quantité $a + bi$ est dite l'*affixe* du point M. A toute quantité complexe correspond, ainsi, un point du plan et, réciproquement, à tout point du plan correspond une quantité complexe.

Cette représentation donne lieu aux remarques préliminaires suivantes :

1° *Une quantité réelle est représentée par un point de l'axe* ox. Car, lorsque b est nul, le point M est sur ox. C'est pour cela que ox est appelé souvent l'*axe des quantités réelles*.

2° *Une quantité imaginaire pure, de la forme* bi, *est représentée par un point de* oy. Car, lorsque a est nul, M est sur oy. Pour cette raison, oy est souvent nommé l'*axe imaginaire*.

(1) Je supposerai, dans tout cet Appendice, le lecteur familiarisé avec la notion des imaginaires. On pourra consulter, à ce sujet, l'Appendice de mes *Leçons d'Algèbre élémentaire*.

(2) Voir, pour la définition des coordonnées, et les éléments de Géométrie analytique nécessaires, les nos 66 à 68 de mes *Leçons d'Algèbre*.

3° *Deux quantités égales et de signes contraires sont représentées par deux points symétriques par rapport à* o. Car deux points M et M_1 (*fig.* 52) symétriques par rapport à o ont des coordonnées respectivement égales et de signes contraires.

4° *Deux quantités imaginaires conjuguées sont représentées par deux points symétriques par rapport à* ox. Car deux points symétriques par rapport à ox, M et M', ont même abscisse a et des ordonnées b et $-b$ égales et

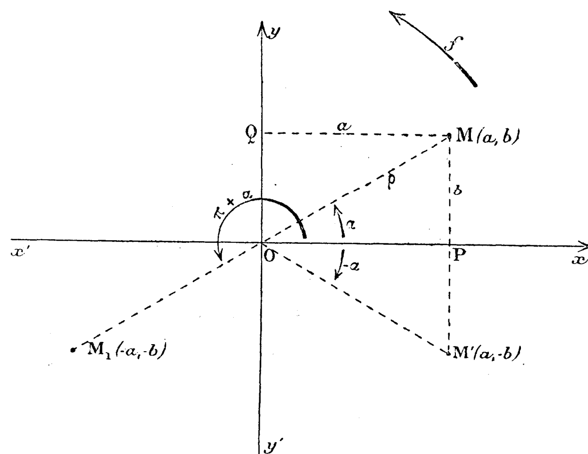


Fig. 52.

de signes contraires. Leurs affixes $a+bi$ et $a-bi$ sont donc bien conjuguées.

181. Module. — Rappelons la définition du module d'une imaginaire : Le *module* de l'imaginaire $a+bi$ est $\sqrt{a^2+b^2}$, le radical ayant sa signification arithmétique. Le module est une quantité essentiellement réelle et positive.

Théorème. — *Dans la représentation géométrique, le module d'une imaginaire est la distance de son point représentatif à l'origine des coordonnées.*

Soit, en effet, M (*fig.* 52) le point dont $a+bi$ est l'affixe. On a évidemment :

$$\text{OM} = \sqrt{\overline{\text{OP}}^2 + \overline{\text{OQ}}^2};$$

donc

$$\text{OM} = \sqrt{a^2+b^2} = |a+bi|.$$

(Rappelons que la notation $|a+bi|$ représente le *module de* $a+bi$).

182. Argument. — La représentation géométrique des quantités complexes nous permet d'introduire une notion nouvelle, celle de *l'argument*.

Soit M le point (*fig.* 52) dont $a + bi$ est l'affixe. *On appelle argument de la quantité* a + bi *l'un des angles dont il faut faire tourner la direction positive* ox *pour l'amener à coïncider avec la direction du vecteur* (OM). En d'autres termes, l'argument est l'une des déterminations de l'angle $\widehat{ox,\mathrm{OM}}$. — Il résulte, immédiatement, de cette définition que l'argument n'est défini qu'à un multiple de 2π près (en prenant comme unité d'angle celui qui correspond à l'arc égal au rayon). Si donc α est l'un des arguments d'une quantité complexe, tous les autres sont congrus à α et sont donnés par la formule

$$\alpha + 2k\pi,$$

où k est un nombre entier positif ou négatif.

La définition précédente donne lieu aux remarques suivantes :

1° *L'argument d'une quantité réelle et positive est congru à zéro.* Car l'un de ces arguments est l'angle de ox avec lui-même.

2° *L'argument d'une quantité réelle et négative est congru à* π. Car une quantité réelle et négative est représentée par un point de ox' et on a

$$\widehat{ox,ox'} = \pi.$$

3° *L'argument d'une quantité de la forme* bi *est congru à* $+\frac{\pi}{2}$ *ou à* $-\frac{\pi}{2}$ *suivant que* b *est positif ou négatif.* Car, si b est positif, bi est l'affixe d'un point de oy, et

$$\widehat{ox,oy} = +\frac{\pi}{2}.$$

Si b est négatif, bi est l'affixe d'un point de oy', et

$$\widehat{ox,oy'} = -\frac{\pi}{2}.$$

4° *Les arguments de deux quantités égales et de signes contraires diffèrent d'un multiple impair de* π. Car deux quantités égales et de signes contraires sont les affixes de deux points M et M_1 symétriques par rapport à o (*fig.* 52), et on a évidemment (n° 23) :

$$\widehat{ox,o\mathrm{M}_1} - \widehat{ox,o\mathrm{M}} = \widehat{o\mathrm{M},o\mathrm{M}_1} = \pi.$$

5° *Les arguments de deux quantités conjuguées sont congrus et de signes contraires.* Car deux quantités conjuguées sont représentées par deux points M et M′ symétriques par rapport à ox; on a donc

$$\widehat{ox,o\mathrm{M}} = -\widehat{ox,o\mathrm{M}'}.$$

183. Forme trigonométrique des imaginaires.

Théorème. — *Toute quantité complexe peut être mise sous la forme*

$$(1) \qquad \rho\,(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

ρ étant son module et α son argument.

Réciproquement, lorsqu'une quantité complexe a la forme (1), ρ étant une quantité positive, son module est égal à ρ et son argument est congru à α.

Soit $a + bi$ une quantité complexe qui est (*fig.* 52) l'affixe du point M. ρ étant son module et α son argument, on a :

$$\rho = o\mathrm{M}, \qquad \alpha \equiv \widehat{ox, o\mathrm{M}}.$$

Projetons le vecteur (oM), orthogonalement, sur ox et oy, nous aurons :

$$a = \rho\cos\alpha, \qquad b = \rho\sin\alpha,$$

et, par suite,

$$(2) \qquad a + bi = \rho\,(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Réciproquement, supposons que nous ayons l'égalité (2), dans laquelle ρ est un nombre *positif*, on en conclut :

$$(3) \qquad \begin{cases} \rho\cos\alpha = a, \\ \rho\sin\alpha = b; \end{cases}$$

d'où, en faisant la somme des carrés des deux membres,

$$(4) \qquad \rho^2 = a^2 + b^2.$$

Comme ρ est une quantité positive, ceci exige que l'on ait :

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2},$$

le radical ayant son sens arithmétique.

Ceci posé, soit M le point représentatif de $a + bi$, il résulte de ce que nous venons de dire que

$$o\mathrm{M} = \rho.$$

On a, en projetant (oM) sur les axes,

$$(5) \qquad \begin{cases} a = \rho\cos(\widehat{ox, o\mathrm{M}}), \\ b = \rho\sin(\widehat{ox, o\mathrm{M}}). \end{cases}$$

Du rapprochement des égalités (3) et (5), on conclut :

$$\cos\alpha = \cos(\widehat{ox, o\mathrm{M}}),$$
$$\sin\alpha = \sin(\widehat{ox, o\mathrm{M}}).$$

Les deux angles α et $\widehat{ox,oM}$ ayant, à la fois, même sinus et même cosinus, sont congrus :

$$\alpha \equiv \widehat{ox,oM};$$

α est donc bien l'argument de $a + bi$.

— Lorsqu'une quantité complexe a été mise sous la forme (1), on dit qu'elle est *mise sous la forme trigonométrique*. De la proposition précédente il résulte qu'il n'y a qu'une seule manière de mettre une quantité imaginaire sous forme trigonométrique.

184. Problème. — *Mettre une quantité imaginaire sous forme trigonométrique. — Calculer son module et son argument.*

Soit $a + bi$ la quantité donnée; ρ et α son module et son argument. On devra avoir :

$$\rho \cos \alpha = a, \quad \rho \sin \alpha = b.$$

On en tire, comme plus haut,

$$(1) \qquad \rho = \sqrt{a^2 + b^2};$$

puis, on a, pour calculer α, les deux égalités

$$(2) \qquad \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ces égalités sont compatibles ; elles déterminent α à un multiple de 2π près, car, comme nous l'avons vu, il n'y a qu'un seul angle α, compris entre 0 et 2π, et vérifiant ces égalités.

Il faut remarquer qu'une seule des deux égalités (2) ne suffirait pas pour déterminer α, car il y a deux séries d'arcs, incongrus, vérifiant l'une des deux égalités. Pratiquement, pour calculer α, on calculera, par les tables, les deux angles α' et α'' compris entre 0 et 2π vérifiant l'une des deux égalités (2); on choisira, ensuite, celui de ces deux angles qui vérifiera l'autre égalité (il y en aura un et un seul).

Remarque. — Des égalités (2) on conclut :

$$(3) \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

Mais, réciproquement, tous les angles α vérifiant cette égalité ne sont pas des arguments de $a + bi$.

Exemples. — 1° *Mettre sous forme trigonométrique une quantité réelle* a. Il y a deux cas :

Si $a > 0$, on a :

$$a = a(\cos 0 + i \sin 0);$$

Si $a < 0$, on a :

$$a = |a| (\cos \pi + i \sin \pi).$$

2° *Mettre sous forme trigonométrique la quantité* i.

L'argument est ici $\frac{\pi}{2}$, le module 1, donc

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}.$$

3° *Mettre sous forme trigonométrique la quantité* $1 + i$.

Le module est ici $\sqrt{2}$, l'argument est donc l'angle α donné par

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

L'une des déterminations de α est donc $\frac{\pi}{4}$, et on a :

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right).$$

185. Somme. — Nous avons défini (n° 2) ce qu'on entend par résultante ou *somme géométrique* de deux segments. On peut définir, de la même façon, la *différence géométrique*.

Étant donnés deux segments (OM) et (OM′) (*fig.* 53), on mène, par le point M, un segment (MD) équipollent au segment (M′O) égal et de sens contraire au segment (OM′). Le segment (OD) est ce qu'on appelle la *différence géométrique* des segments (OM) et (OM′) et on écrit l'égalité géométrique :

$$(OD) = (OM) - (OM').$$

Cette appellation est d'ailleurs justifiée par ce fait que (OM) est la somme géométrique de (OD) et de (OM′), car la figure ODMM′ est, manifestement, un parallélogramme.

On peut encore construire la différence géométrique (OD) de la façon suivante : on mène le segment (OM'_1) équipollent au segment (M′O) et on prend la diagonale (OD) du parallélogramme construit sur (OM) et (OM'_1). Cela revient, en effet, à prendre la résultante des deux segments (OM) et (M′O) (voir n° 2).

Remarquons, enfin, que le segment (M′M) est aussi la différence géométrique de (OM) et (OM′), car (M′M) est équipollent à (OD). On a ainsi une égalité analogue à l'égalité [4] du n° 5 :

$$(M'M) = (OM) - (OM').$$

Théorème. — M et M' *étant les points représentatifs de deux imaginaires,*

1° *Le point représentatif* S *de leur somme s'obtient en faisant la somme géométrique* (OS) *des deux segments* (OM) *et* (OM');

2° *Le point représentatif* D *de leur différence s'obtient en faisant la différence géométrique* (OD) *des deux segments* (OM) *et* (OM').

Soient, en effet, $a + bi$ et $a' + b'i$ deux quantités complexes, M et M' (*fig.* 53) les points représentatifs.

Soient (OS) la somme géométrique des deux segments (OM) et (OM'), A et B les coordonnées de S.

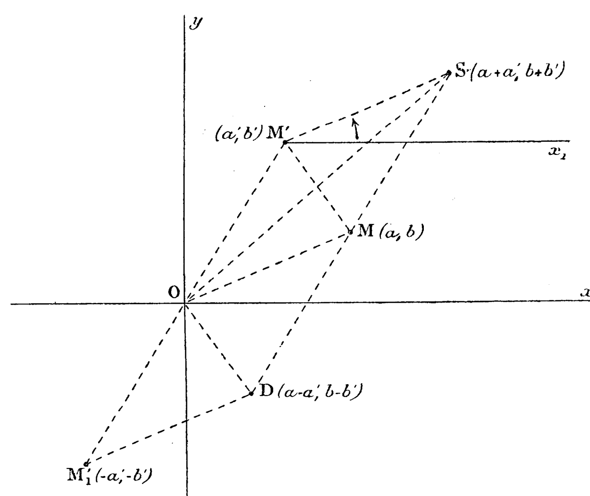


Fig. 53.

Si on projette sur un axe quelconque, on a :

$$\text{proj. (OS)} = \text{proj. (OM)} + \text{proj. (OM')}.$$

Projetons, orthogonalement, sur *ox* et *oy*, et nous aurons :

$$A = a + a',$$
$$B = b + b';$$

d'où

$$A + iB = a + a' + i\,(b + b').$$

Ceci prouve bien que S est le point représentatif de la somme de $a + ib$ et $a' + ib'$.

Prenons le point M'_1 symétrique de M' par rapport à O, et soit (OD) la somme géométrique de (OM) et (OM'_1). (OD) est aussi la différence géomé-

trique (OM) — (OM′). Or, M'_1 est, comme nous savons (n° 180), le point représentatif de $-(a'+ib')$. D est donc, d'après ce qui précède, le point représentatif de la somme de $a+ib$ et de $-(a'+ib')$, c'est-à-dire de

$$a+ib-(a'+ib').$$

Remarque. — Il résulte de ce théorème que, pour faire la somme ou la différence de deux quantités complexes, on est ramené à faire la somme ou la différence géométrique de deux segments.

On peut encore remarquer que, le vecteur (M′M) étant équipollent au vecteur (OD), la distance M′M est le module de la différence des deux imaginaires, et l'angle $\widehat{M'x_1, M'M}$ son argument, $M'x_1$ étant parallèle à ox et de même sens.

Corollaire. — $M_1, M_2, \ldots M_p$ *étant les points représentatifs de* p *imaginaires, le point représentatif* S *de leur somme s'obtient en faisant la somme géométrique* (OS) *des vecteurs* $(OM_1), (OM_2), \ldots (OM_p)$.

Il suffit, pour établir cette proposition, d'appliquer $p-1$ fois de suite le théorème précédent.

186. Théorème. — *Le module de la somme ou de la différence de deux quantités complexes est compris entre la somme et la différence des modules de ces deux quantités.*

Ce théorème a déjà été établi en algèbre [1]. Il découle presque immédiatement des considérations géométriques qui précèdent. Soient, en effet, deux imaginaires qui sont les affixes de deux points M et M′ (*fig.* 53). La somme des deux imaginaires est l'affixe du point S tel que

$$(OS) = (OM) + (OM').$$

OS est donc le module de la somme et, d'ailleurs, comme nous l'avons remarqué, MM′ est le module de la différence des deux quantités. Dans les deux triangles OSM et OMM′, on a :

$$OM - MS < OS < OM + MS,$$

c'est-à-dire :

$$OM - OM' < OS < OM + OM';$$

et

$$OM - OM' < MM' < OM + OM'.$$

Ceci démontre la proposition énoncée, puisque les longueurs OM et OM′ sont les modules des affixes de M et M′.

Remarque. — La démonstration précédente tombe en défaut lorsque les trois points M, M′ et O sont en ligne droite.

[1] Voir, dans mes *Leçons d'Algèbre*, n° 161, Th. I.

Dans ce cas, deux dispositions de figure peuvent se présenter :

1° (*fig.* 54, I) les deux points M et M′ sont d'un même côté du point O; les deux segments (OM) et (OM′) sont de même sens et on a :

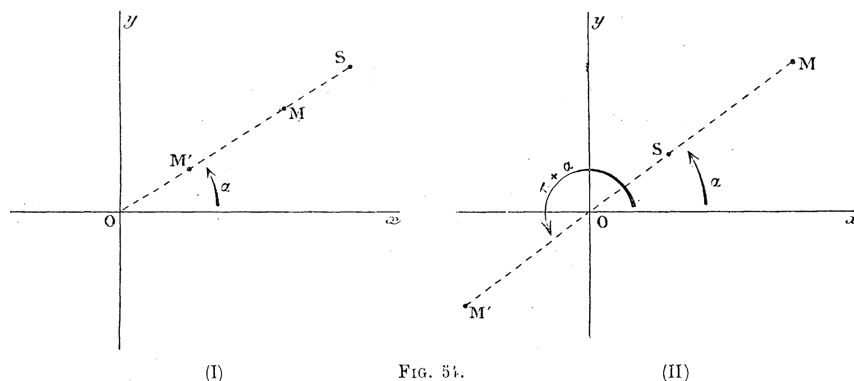
$$\begin{aligned} OS &= OM + OM', \\ MM' &= OM - OM'. \end{aligned}$$

Le module de la somme est égal à la somme des modules; et le module de la différence est égal à la différence des modules.

Les deux quantités complexes ont, dans ce cas, *même argument*. Leur quotient est réel et positif. Car si on appelle ρ et ρ' les modules et α l'argument commun, les deux affixes de M et M′ sont

$$\rho\,(\cos\alpha + i\sin\alpha) \quad \text{et} \quad \rho'\,(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

leur quotient $\frac{\rho}{\rho'}$ est bien réel et positif.



(I) Fig. 54. (II)

2° Les deux points M et M′, en ligne droite avec le point O, sont de part et d'autre de ce point (*fig.* 54, II). On a, alors,

$$\begin{aligned} OS &= OM - OM', \\ MM' &= OM + OM'. \end{aligned}$$

Le module de la somme est égal à la différence des modules et le module de la différence est égal à la somme des modules.

Les arguments des deux quantités complexes *diffèrent*, dans ce cas, *d'un multiple impair de* π.

Leur quotient est réel et négatif. Car, si ρ et α sont le module et l'argument de l'affixe de M, ρ' étant le module de l'affixe de M′, $\pi + \alpha$ est une

des déterminations de son argument. Les deux quantités complexes sont donc :

$$\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

et

$$\rho'\big(\cos(\pi+\alpha) + i\sin(\pi+\alpha)\big) = -\rho'(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Le quotient $-\frac{\rho}{\rho'}$ est bien réel et négatif.

Nous retrouvons, ainsi, par une voie géométrique, toutes les particularités signalées en algèbre.

187. Produit et quotient. — **Théorème.** — *Le module du produit de plusieurs quantités complexes est égal au produit de leurs modules et l'argument de ce produit est congru à la somme des arguments des facteurs.*

1° *Cas de deux facteurs.* — Soient

$$\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) \quad \text{et} \quad \rho'(\cos\alpha' + i\sin\alpha')$$

deux quantités complexes, mises sous forme trigonométrique. Le produit de ces deux quantités est, en appliquant la règle de formation du produit de deux imaginaires [1],

$$\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)\times\rho'(\cos\alpha' + i\sin\alpha') =$$
$$\rho\rho'\big[\cos\alpha\cos\alpha' - \sin\alpha\sin\alpha' + i(\sin\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha'\cos\alpha)\big].$$

Or, d'après les formules d'addition [**38**] et [**39**], on a

$$\cos\alpha\cos\alpha' - \sin\alpha\sin\alpha' = \cos(\alpha+\alpha'),$$
$$\sin\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha'\cos\alpha = \sin(\alpha+\alpha').$$

On en conclut :

$$\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)\times\rho'(\cos\alpha' + i\sin\alpha') = \rho\rho'\big[\cos(\alpha+\alpha') + i\sin(\alpha+\alpha')\big].$$

Le produit est ainsi mis sous forme trigonométrique, et, de la réciproque du théorème du n° 183, il résulte que son module est $\rho\rho'$, c'est-à-dire le produit des modules, et que son argument est congru à la somme $\alpha+\alpha'$ des arguments des facteurs.

2° *Cas général.* — Le théorème s'étend, comme en algèbre [2], au cas de plusieurs facteurs.

Soient α, β, γ, δ quatre quantités complexes. On a, en considérant le produit $\alpha\beta\gamma\delta$ comme le produit de deux facteurs $\alpha\beta\gamma$ et δ,

$$(1)\quad \begin{cases} |\alpha\beta\gamma\delta| = |\alpha\beta\gamma|\cdot|\delta|, \\ \arg(\alpha\beta\gamma\delta) \equiv \arg(\alpha\beta\gamma) + \arg(\delta). \end{cases}$$

(1) Voir, dans mes *Leçons d'Algèbre*, le n° 158.
(2) Voir, dans mes *Leçons d'Algèbre*, le Th. II du n° 161.

Puis, de même, en considérant $\alpha\beta\gamma$ comme le produit de $\alpha\beta$ par γ,

$$(2)\quad \begin{cases} |\alpha\beta\gamma| = |\alpha\beta| \cdot |\gamma|, \\ \arg(\alpha\beta\gamma) \equiv \arg(\alpha\beta) + \arg(\gamma). \end{cases}$$

Et, enfin,

$$(3)\quad \begin{cases} |\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|, \\ \arg(\alpha\beta) \equiv \arg(\alpha) + \arg(\beta). \end{cases}$$

Des trois couples d'égalités (1), (2) et (3), on conclut :

$$|\alpha\beta\gamma\delta| = |\alpha| \cdot |\beta| \cdot |\gamma| \cdot |\delta|,$$

et

$$\arg(\alpha\beta\gamma\delta) \equiv \arg(\alpha) + \arg(\beta) + \arg(\gamma) + \arg(\delta);$$

ce qui établit la proposition dans toute sa généralité.

Corollaire. — *Le module de la puissance* m^ième^ *d'une quantité imaginaire est égal à la puissance* m^ième^ *de son module. L'argument de cette puissance est congru à* m *fois l'argument de la quantité imaginaire.*

Il suffit, en effet, d'appliquer le théorème précédent à un produit de m facteurs tous égaux entre eux.

Théorème. — *Le module du quotient de deux quantités imaginaires est égal au quotient de leurs modules et l'argument est congru à la différence des arguments des deux termes.*

Soit, en effet, γ le quotient des deux quantités imaginaires α et β, comme

$$\alpha = \beta\gamma,$$

on conclut, d'après ce qui précède,

$$|\alpha| = |\beta| \cdot |\gamma| \qquad \text{et} \qquad \arg(\alpha) \equiv \arg(\beta) + \arg(\gamma)$$

et, par suite,

$$|\gamma| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \qquad \text{et} \qquad \arg(\gamma) \equiv \arg(\alpha) - \arg(\beta).$$

EXERCICES

84. Mettre sous forme trigonométrique les quantités imaginaires suivantes :

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{i}{2}, \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, \qquad \frac{1-i}{1+i}.$$

85. On considère les deux imaginaires $a + bi$ et $x + yi$.
La première est fixe et la seconde varie de façon que

$$|x + yi - a - bi| = \rho,$$

ρ étant un nombre positif donné. Quel est le lieu décrit par le point dont $x + yi$ est l'affixe ?

86. Soient M et M' deux points dont les affixes sont $x + yi$ et $x' + y'i$. k étant un nombre fixe donné, on suppose que M et M' soient tels que

$$(x + yi)(x' + y'i) = k.$$

Lorsque M décrit une droite, quel est le lieu de M'? Lorsque M décrit un cercle quel est le lieu de M'? Plus généralement quelle est la *transformation* définie par cette relation ?

Mêmes questions en supposant que, d'une façon plus générale, les affixes de M et M' soient liées par la relation

$$a(x + yi)(x' + y'i) + b(x + yi) + c(x' + y'i) + d = 0,$$

a, b, c, d étant quatre nombres fixes.

87. Soient M et M' les points représentatifs de deux imaginaires; P le point représentatif du produit de ces deux imaginaires. Prouver que :

1° $$\widehat{ox, oM} + \widehat{ox, oM'} = \widehat{ox, oP};$$

2° Si I est un point pris sur ox tel que $\overline{OI} = +1$, les deux triangles OIM et OM'P sont semblables.

Énoncer et démontrer les propositions analogues pour le quotient.

88. Soient $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$, n quantités complexes fixes et $z = x + yi$ une quantité variable. Étudier la variation de l'argument du produit

$$(z - a_1)(z - a_2)\dots(z - a_n),$$

lorsque le point représentatif de z décrit une courbe fermée.

On distinguera plusieurs cas suivant que la courbe fermée (qu'on supposera avoir une forme simple comme celle d'un cercle ou d'une ellipse) entoure un ou plusieurs des points dont les affixes sont $a_1, a_2, \dots a_n$.

CHAPITRE II

FORMULE DE MOIVRE. ADDITION, MULTIPLICATION ET DIVISION DES ARCS

188. Addition. — La représentation trigonométrique des imaginaires et, en particulier, le théorème du n° 187, vont nous permettre d'établir par une nouvelle voie, très rapide, les formules générales d'addition démontrées dans les n°s 79 à 81.

Considérons m quantités imaginaires : soient $\rho_1, \rho_2, \dots \rho_m$ leurs modules, $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$ leurs arguments. D'après la proposition du n° 187, le module de leur produit est $\rho_1\rho_2\dots\rho_m$ et l'argument de ce produit est

congru à $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m$; on en conclut l'égalité fondamentale que voici :

$$[66]\quad \rho_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1) \times \rho_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2) \times \ldots \times \rho_m(\cos\alpha_m + i\sin\alpha_m)$$
$$= \rho_1\rho_1 \ldots \rho_m\left[\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m)\right].$$

En particulier, on a, en supprimant, dans cette égalité, les facteurs $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_m$,

$$[67]\quad (\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)\ldots(\cos\alpha_m + i\sin\alpha_m)$$
$$= \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2 \ldots + \alpha_m).$$

Développons le premier membre de cette dernière égalité, et égalons, dans les deux membres, les parties réelles et les parties imaginaires. Pour faire commodément ce développement, mettons le produit $\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots \cos\alpha_m$ en facteur, et désignons par P le premier membre de l'égalité [**67**]. Nous aurons :

$$P = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots \cos\alpha_m (1 + i\,\mathrm{tg}\,\alpha_1)(1 + i\,\mathrm{tg}\,\alpha_2)\ldots(1 + i\,\mathrm{tg}\,\alpha_m).$$

Il nous reste à effectuer le produit Q :

$$Q = (1 + i\,\mathrm{tg}\,\alpha_1)(1 + i\,\mathrm{tg}\,\alpha_2)\ldots(1 + i\,\mathrm{tg}\,\alpha_m).$$

Or, d'après la règle de multiplication des sommes, ce produit est égal à la somme des produits partiels obtenus en prenant, dans chacun des facteurs, un terme et un seul. Ces produits partiels sont de diverses natures :

1° Nous obtenons un premier produit partiel en prenant 1 dans chaque facteur; ce qui donne 1.

2° Nous obtenons une seconde catégorie de produits partiels en prenant 1 dans $(m-1)$ facteurs et le second terme dans le facteur restant. Ces produits seront :

$$i\,\mathrm{tg}\,\alpha_1, \quad i\,\mathrm{tg}\,\alpha_2, \quad \ldots \quad i\,\mathrm{tg}\,\alpha_m,$$

et leur somme est iT_1, en posant

$$T_1 = \mathrm{tg}\,\alpha_1 + \mathrm{tg}\,\alpha_2 + \ldots + \mathrm{tg}\,\alpha_m.$$

3° Considérons, en troisième lieu, les produits partiels obtenus en prenant 1 dans $(m-2)$ facteurs et les seconds termes dans les facteurs restants. Ces produits seront :

$$i^2\,\mathrm{tg}\,\alpha_1\,\mathrm{tg}\,\alpha_2, \quad i^2\,\mathrm{tg}\,\alpha_1\,\mathrm{tg}\,\alpha_3, \ldots \quad i^2\,\mathrm{tg}\,\alpha_1\,\mathrm{tg}\,\alpha_m, \ \ldots,$$

et leur somme est i^2T_2 en désignant par T_2 la somme des produits deux à deux des m tangentes $\mathrm{tg}\alpha_1$, $\mathrm{tg}\alpha_2$,... $\mathrm{tg}\alpha_m$:

$$T_2 = \mathrm{tg}\,\alpha_1\,\mathrm{tg}\,\alpha_2 + \mathrm{tg}\,\alpha_1\,\mathrm{tg}\,\alpha_3 + \ldots + \mathrm{tg}\,\alpha_1\,\mathrm{tg}\,\alpha_m + \ldots.$$

4° Plus généralement, considérons les produits partiels obtenus en prenant 1 dans $m - p$ facteurs et les seconds termes dans les p facteurs restants ; et cela de toutes les manières possibles. Nous obtiendrons des produits partiels dont la somme sera $i^p\, T_p$, en désignant par T_p la somme des produits p à p des m tangentes :

$$T_p = \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 \ldots \operatorname{tg} \alpha_p + \ldots .$$

5° Enfin, le produit de tous les seconds termes des facteurs de Q sera

$$i^m \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 \ldots \operatorname{tg} \alpha_m = i^m\, T_m.$$

Nous aurons donc, finalement,

$$Q = 1 + i\, T_1 + i^2\, T_2 + i^3\, T_3 + i^4\, T_4 + \ldots + i^m\, T_m.$$

En tenant compte des égalités

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \ldots$$

le produit Q prend la forme :

$$Q = 1 + iT_1 - T_2 - iT_3 + T_4 + iT_5 - \ldots .$$

Séparons les parties réelles et les parties imaginaires, multiplions par $\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \ldots \cos \alpha_m$, et nous avons l'expression suivante du développement de P :

$$P = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \ldots \cos \alpha_m [1 - T_2 + T_4 - \ldots]$$
$$+ i \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \ldots \cos \alpha_m [T_1 - T_3 + T_5 - \ldots]$$

En vertu de l'égalité [**67**], on a

$$P = \cos (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m) + i \sin (\alpha_1 + \alpha_2 \ldots + \alpha_m) ;$$

si donc on égale, dans ces deux expressions de P, les parties réelles et les parties imaginaires, on parvient aux formules générales d'addition données au n° 79 :

$$[\alpha] \quad \cos (\alpha_1 + \alpha_2 \ldots + \alpha_m) = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \ldots \cos \alpha_m [1 - T_2 + T_4 - \ldots],$$

$$[\beta] \quad \sin (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m) = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \ldots \cos \alpha_m [T_1 - T_3 + T_5 - \ldots].$$

On en déduit, par division,

$$[\gamma] \qquad \operatorname{tg} (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m) = \frac{T_1 - T_3 + T_5 - \ldots}{1 - T_2 + T_4 - \ldots}.$$

189. Multiplication. — Formule de Moivre. — Dans l'égalité [**66**], qui donne le produit de m imaginaires, supposons que ces m imaginaires deviennent égales et faisons

$$\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_m = \rho,$$
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = \alpha.$$

La relation devient :

$$[68] \qquad [\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)]^m = \rho^m(\cos m\alpha + i\sin m\alpha),$$

égalité qui découle, d'ailleurs, directement du corollaire du n° 187.

Si, dans l'égalité [68], on divise les deux membres par ρ^m, ou si l'on fait $\rho = 1$, on obtient la formule connue sous le nom de *formule de Moivre :*

$$[69] \qquad (\cos\alpha + i\sin\alpha)^m = \cos m\alpha + i\sin m\alpha,$$

dans laquelle m désigne un entier positif.

Remarque. — Il est facile de montrer que la formule de Moivre s'applique encore au cas d'un exposant entier, mais *négatif*.

Soit, en effet, m un entier négatif ; posons

$$m = -m',$$

m' sera un entier positif et, d'après la formule [69], on a :

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{m'} = \cos m'\alpha + i\sin m'\alpha,$$

d'où :

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^m = \frac{1}{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{m'}} = \frac{1}{\cos m'\alpha + i\sin m'\alpha}.$$

Multiplions les deux termes du dernier rapport par la quantité $\cos m'\alpha - i\sin m'\alpha$, conjuguée du dénominateur, et remarquons que le dénominateur devient :

$$\cos^2 m'\alpha + \sin^2 m'\alpha = 1.$$

Nous aurons :

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^m = \cos m'\alpha - i\sin m'\alpha.$$

En observant que

$$\cos m\alpha = \cos(-m'\alpha) = \cos m'\alpha,$$
$$\sin m\alpha = \sin(-m'\alpha) = -\sin m'\alpha,$$

cette dernière égalité s'écrit, enfin,

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^m = \cos m\alpha + i\sin m\alpha,$$

ce qui établit l'exactitude de la formule [69] dans le cas d'un exposant entier négatif.

190. — Formule générale de multiplication des arcs. — De même que nous avons déduit de l'égalité [67] les formules générales d'addition des arcs, nous obtiendrons, en développant les deux membres de la formule de Moivre, les formules de multiplication

Rappelons, à cet effet, la formule connue sous le nom de *binôme de Newton*(1), qui donne le développement de $(a+b)^m$ suivant les puissances de a ou b.

Soient m et p deux entiers quelconques, p étant au plus égal à m, on désigne par C_m^p la quantité suivante :

$$C_m^p = \frac{m(m-1)(m-2).....(m-p+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot .....\, p},$$

qui est le quotient du produit de p nombres entiers décroissants à partir de m par le produit des p premiers nombres entiers(2). On a, alors, l'égalité que voici :

$$(a+b)^m = a^m + C_m^1 a^{m-1} b + C_m^2 a^{m-2} b^2 + C_m^3 a^{m-3} b^3 + ... + C_m^m b^m.$$

Si on remplace les coefficients C_m^1, C_m^2,... par leurs valeurs, on a encore :

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} a^{m-2} b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3} a^{m-3} b^3 + ... + \frac{m}{1} ab^{m-1} + b^m,$$

et il est facile de vérifier que les coefficients des termes à égale distance des extrêmes, a^m et b^m, sont égaux.

Ceci posé, appliquons cette formule au développement du premier membre de la formule de Moivre [**69**], en posant :

$$a = \cos\alpha, \quad b = i\sin\alpha,$$

et nous aurons :

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^m = \cos^m\alpha + iC_m^1 \cos^{m-1}\alpha \sin\alpha + i^2 C_m^2 \cos^{m-2}\alpha \sin^2\alpha + i^3 C_m^3 \cos^{m-3}\alpha \sin^3\alpha + i^4 C_m^4 \cos^{m-4}\alpha \sin^4\alpha + \ldots .$$

Remplaçons i^2, i^3, i^4, ... par leurs valeurs -1, $-i$, 1, ..., séparons les parties réelles et imaginaires et il vient :

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^m = \cos^m\alpha - C_m^2 \cos^{m-2}\alpha \sin^2\alpha + C_m^4 \cos^{m-4}\alpha \sin^4\alpha - \ldots + i\left[C_m^1 \cos^{m-1}\alpha \sin\alpha - C_m^3 \cos^{m-3}\alpha \sin^3\alpha + \ldots\right].$$

(1) La formule du binôme de Newton étant exposée dans tous les Cours de Mathématiques spéciales, nous croyons inutile de l'établir ici. D'ailleurs, nous l'avons proposée plusieurs fois sous forme d'exercice dans les *Leçons d'Algèbre élémentaire*. — Voir, à ce sujet, les exercices 25 et 166 de ces Leçons.

(2) C_m^p est le nombre des *combinaisons* de m objets p à p.

Or, d'après la formule de Moivre, on a aussi

$$(\cos\alpha + i \sin\alpha)^m = \cos m\alpha + i \sin m\alpha,$$

on en conclut, en comparant ces deux égalités, celles-ci :

$$[70] \quad \cos m\alpha = \cos^m\alpha - C_m^2 \cos^{m-2}\alpha \sin^2\alpha + C_m^4 \cos^{m-4}\alpha \sin^4\alpha - \ldots$$

$$[71] \quad \sin m\alpha = C_m^1 \cos^{m-1}\alpha \sin\alpha - C_m^3 \cos^{m-3}\alpha \sin^3\alpha + C_m^5 \cos^{m-5}\alpha \sin^5\alpha - \ldots$$

qui sont les formules générales de multiplication des arcs.

En les divisant, membre à membre, on a $\operatorname{tg} m\alpha$:

$$\operatorname{tg} m\alpha = \frac{C_m^1 \cos^{m-1}\alpha \sin\alpha - C_m^3 \cos^{m-3}\alpha \sin^3\alpha + C_m^5 \cos^{m-5}\alpha \sin^5\alpha - \ldots}{\cos^m\alpha - C_m^2 \cos^{m-2}\alpha \sin^2\alpha + C_m^4 \cos^{m-4}\alpha \sin^4\alpha - \ldots}.$$

Dans cette dernière formule, divisons les deux termes par $\cos^m\alpha$, il vient, enfin,

$$[72] \qquad \operatorname{tg} m\alpha = \frac{C_m^1 \operatorname{tg}\alpha - C_m^3 \operatorname{tg}^3\alpha + C_m^5 \operatorname{tg}^5\alpha - \ldots}{1 - C_m^2 \operatorname{tg}^2\alpha + C_m^4 \operatorname{tg}^4\alpha - \ldots}.$$

Écrivons encore les égalités précédentes en remplaçant les coefficients C_m^p par leurs valeurs :

$$[70^{bis}] \qquad \cos m\alpha = \cos^m\alpha - \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cos^{m-2}\alpha \sin^2\alpha + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos^{m-4}\alpha \sin^4\alpha - \ldots,$$

$$[71^{bis}] \quad \sin m\alpha = \frac{m}{1}\cos^{m-1}\alpha \sin\alpha - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{m-3}\alpha \sin^3\alpha + \ldots,$$

$$[72^{bis}] \operatorname{tg} m\alpha = \frac{\frac{m}{1}\operatorname{tg}\alpha - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\operatorname{tg}^3\alpha + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\operatorname{tg}^5\alpha - \ldots}{1 - \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\operatorname{tg}^2\alpha + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\operatorname{tg}^4\alpha - \ldots}$$

191. Exemples. — Appliquons ces formules à quelques cas simples :

1° Prenons $m = 3$, nous aurons :

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha \sin^2\alpha,$$
$$\sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha \sin\alpha - \sin^3\alpha,$$
$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha},$$

formules que nous avions déjà trouvées au n° 84. En remplaçant $\sin^2\alpha$

par $1 - \cos^2\alpha$ et $\cos^2\alpha$ par $1 - \sin^2\alpha$, les deux premières s'écrivent :

$$[73] \quad \begin{cases} \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha, \\ \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha. \end{cases}$$

2° Prenons $m = 4$:

$$\cos 4\alpha = \cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \sin^4\alpha,$$
$$\sin 4\alpha = 4\cos^3\alpha\sin\alpha - 4\cos\alpha\sin^3\alpha,$$
$$\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{4\operatorname{tg}\alpha - 4\operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 6\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^4\alpha}.$$

On peut encore remarquer ici que $\cos 4\alpha$ peut s'exprimer rationnellement en fonction de $\cos\alpha$ seulement :

$$\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1.$$

C'est d'ailleurs là un fait général. La formule [**70**] ne contient que des puissances *paires* de $\sin\alpha$; on peut donc, en y remplaçant $\sin^2\alpha$ par $1 - \cos^2\alpha$, exprimer rationnellement $\cos m\alpha$ en fonction de $\cos\alpha$, seulement.

Lorsque m est *impair*, la formule [**71**] ne contient que des puissances paires de $\cos\alpha$; on peut donc, dans ce cas, exprimer rationnellement $\sin m\alpha$ uniquement en fonction de $\sin\alpha$, comme cela a eu lieu pour $\sin 3\alpha$.

192. Division. — Le problème de la division des arcs est le suivant : *Connaissant les lignes de l'arc* a, *calculer celles de l'arc ou des arcs* $\frac{a}{m}$.

Nous avons donné, au n° 85, la marche générale à suivre pour résoudre ce problème; puis, dans les numéros suivants (86 à 90), nous avons traité les cas élémentaires où le diviseur m était de la forme 2^p. Maintenant que nous possédons les formules générales de multiplication des arcs, il nous sera aisé d'aborder le cas général.

Nous étudierons d'abord le cas simple de la division par *trois*.

193. Trisection. — Problème I. — *Connaissant* cos a, *calculer les lignes trigonométriques de l'arc* $\frac{a}{3}$.

Écrivons la première formule [**73**] du n° 191 :

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$

et, dans cette formule, faisons $\alpha = \frac{a}{3}$; il vient :

$$(1) \qquad 4\cos^3\frac{a}{3} - 3\cos\frac{a}{3} - \cos a = 0.$$

Nous avons ainsi, pour déterminer $\cos\frac{a}{3}$, une équation du troisième

degré. Cette équation a ses trois racines réelles et comprises entre -1 et $+1$: Substituons, en effet, dans le premier membre, successivement, à $\cos\frac{a}{3}$, les nombres $-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$, nous trouvons les résultats suivants :

$$\begin{array}{ll} \textit{pour } -1: & -1-\cos a \leqslant 0, \\ \textit{pour } -\frac{1}{2}: & 1-\cos a \geqslant 0, \\ \textit{pour } \frac{1}{2}: & -1-\cos a \leqslant 0, \\ \textit{pour } 1: & 1-\cos a \geqslant 0. \end{array}$$

L'alternance des signes de ces quatre résultats de substitution nous prouve[1] qu'il y a une racine, en $\cos\frac{a}{3}$, comprise entre -1 et $-\frac{1}{2}$, une autre entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ et une troisième entre $\frac{1}{2}$ et 1. Il y a donc *trois* valeurs acceptables pour $\cos\frac{a}{3}$.

L'équation (1) n'ayant pas de terme en $\cos^2\frac{a}{3}$. la somme algébrique de ces trois valeurs est nulle.

Connaissant $\cos\frac{a}{3}$, on a $\sin\frac{a}{3}$ par la formule

$$\sin\frac{a}{3} = \pm\sqrt{1-\cos^2\frac{a}{3}}.$$

Il y a *six* valeurs, deux à deux égales et de signes contraires, pour $\sin\frac{a}{3}$; donc, aussi, *six* valeurs pour $\operatorname{tg}\frac{a}{3}$.

Ces résultats sont faciles à expliquer.

Ce que nous connaissons, ce n'est pas a, c'est $\cos a$. L'équation (1) nous donne donc les cosinus des tiers de *tous* les arcs ayant même cosinus que a. Or, ces arcs sont compris dans la formule [**23**] :

$$2k\pi \pm a.$$

Les tiers sont donc donnés par :

$$\frac{2k\pi}{3} \pm \frac{a}{3}.$$

(1) Cette proposition résulte de ce fait qu'une fonction continue ne peut passer d'une valeur négative à une valeur positive sans passer par la valeur intermédiaire zéro. Un polynôme entier ne peut donc changer de signe sans s'annuler. (Voir dans mes *Leçons d'Algèbre* le n° 115, p. 332.)

Nous allons montrer que tous ces arcs n'ont que trois cosinus différents. En effet, si k est multiple de 3,

$$k = 3h,$$

on a :

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{3} \pm \frac{a}{3}\right) = \cos\left(2h\pi \pm \frac{a}{3}\right) = \cos\frac{a}{3}.$$

Si k est un multiple de 3 plus 1,

$$k = 3h + 1,$$

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{3} \pm \frac{a}{3}\right) = \cos\left(2h\pi + \frac{2\pi}{3} \pm \frac{a}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} \pm \frac{a}{3}\right).$$

Enfin, si k est un multiple de 3 moins 1,

$$k = 3h - 1,$$

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{3} \pm \frac{a}{3}\right) = \cos\left(2h\pi - \frac{2\pi}{3} \pm \frac{a}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} \mp \frac{a}{3}\right),$$

ces deux dernières valeurs sont égales aux deux précédentes.

Il n'y a donc bien, en tout, que trois valeurs pour les cosinus :

$$\cos\frac{a}{3},\ \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{a}{3}\right),\ \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{a}{3}\right).$$

En remarquant que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{a}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{a}{3}\right),$$

il est facile de vérifier que la somme des trois valeurs est nulle, car on a à faire la somme de trois cosinus d'arcs en progression arithmétique (voir n° 92).

Les sinus ont six valeurs, deux à deux égales et de signes contraires,

$$\pm \sin\frac{a}{3},\ \pm \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{a}{3}\right),\ \pm \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{a}{3}\right).$$

On peut encore vérifier ces résultats par une voie géométrique.

Pour cela, faisons une remarque préliminaire. Considérons (*fig.* 55), sur un cercle orienté, tous les arcs $\overset{\frown}{AM}$ d'origine A et d'extrémité M. Prenons le tiers de l'arc géométrique AM et soit AN cet arc. Les tiers de tous les arcs $\overset{\frown}{AM}$ sont terminés en l'un des trois points N, N_1 ou N_2 qui sont les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle dont un des

sommets est N. Le tiers du plus petit arc positif $\overset{\frown}{AM}$ est, en effet, terminé en N. Tous les autres arcs $\overset{\frown}{AM}$ se déduisant du plus petit arc positif en lui ajoutant ou retranchant un nombre entier de circonférences, les tiers de ces arcs s'obtiennent en ajoutant ou retranchant à l'arc $\overset{\frown}{AN}$ un nombre entier de *tiers* de circonférence. En ajoutant un premier tiers, on obtient le point N_1 ; puis, en ajoutant un second tiers, on parvient en N_2 ; enfin, en ajoutant un troisième tiers, on revient en N. On repasse ensuite successivement par N_1, N_2 et N.

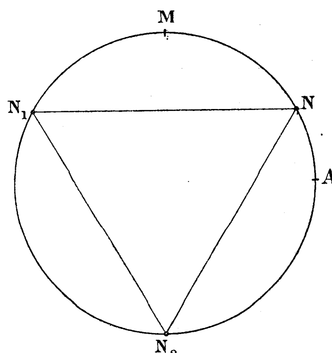


Fig. 55.

Ceci posé, soit, sur le cercle trigonométrique, A une origine choisie arbitrairement pour les arcs ; *ox* et *oy* les

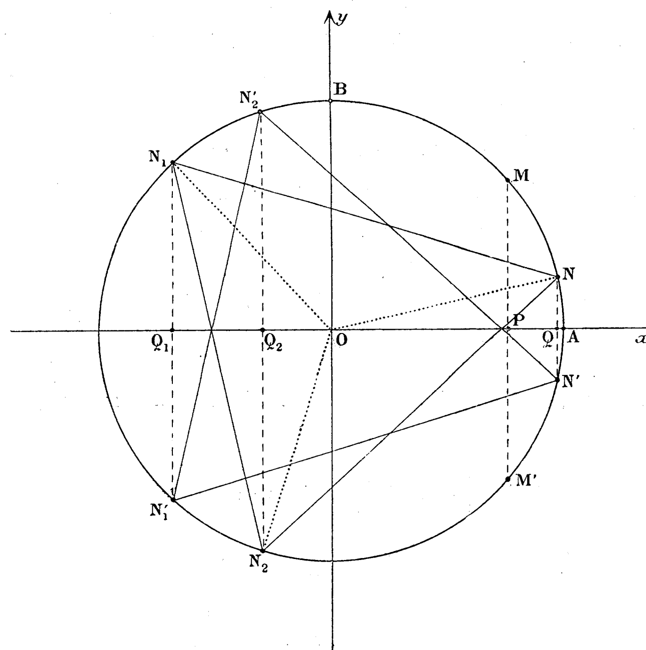


Fig. 56.

axes des cosinus et des sinus relatifs à cette origine (*fig.* 56). Prenons, sur *ox*,

$$\overline{OP} = \cos a,$$

et, en P, élevons une perpendiculaire à ox qui coupe le cercle en M et M′. Tous les arcs d'origine A, admettant pour cosinus $\overline{OP}$, sont terminés en M ou en M′. Soit N l'extrémité du tiers du plus petit arc positif $\overset{\frown}{AM}$; d'après ce que nous venons de dire, les tiers des arcs terminés en M auront leurs extrémités en l'un des trois sommets du triangle équilatéral NN_1N_2. Prenons le symétrique N′ du point N par rapport à ox; il est clair que l'un des arcs terminés en M′ aura pour tiers un arc terminé en N′. Les tiers de tous les arcs terminés en M′ seront donc terminés en l'un des sommets du triangle équilatéral $N'N'_1N'_2$. Les deux triangles équilatéraux NN_1N_2 et $N'N'_1N'_2$, ayant un premier couple de sommets, N et N′, symétriques par rapport à ox, sont évidemment symétriques par rapport à ox.

Il en résulte que les six sommets de ces deux triangles se projettent, deux par deux, aux *mêmes* points sur ox et en des points *symétriques par rapport à* O sur oy. Il n'y a donc que trois valeurs $\overline{OQ}$, $\overline{OQ_1}$, $\overline{OQ_2}$ pour les cosinus; il y a six valeurs égales et de signes contraires, deux à deux, pour les sinus.

On pourrait encore vérifier que la somme des trois cosinus est nulle :

$$\overline{OQ} + \overline{OQ_1} + \overline{OQ_2} = 0.$$

En effet, comme il est aisé de le démontrer, le vecteur (ON) est égal et directement opposé à la résultante des deux vecteurs (ON_1) et (ON_2). On a donc, en projetant sur un axe quelconque,

$$\text{proj.}\,(ON) + \text{proj.}\,(ON_1) + \text{proj.}\,(ON_2) = 0.$$

Il suffit de projeter sur ox pour obtenir la relation précédente. En projetant sur oy, on en conclurait que la somme des sinus des arcs $\overset{\frown}{AN}$, $\overset{\frown}{AN_1}$ et $\overset{\frown}{AN_2}$ est également nulle.

194. Problème II. — *Connaissant* sin a, *calculer les lignes trigonométriques des arcs* $\frac{a}{3}$.

Dans la deuxième formule [**73**] (n° 191), faisons $\alpha = \frac{a}{3}$; nous obtenons l'équation :

$$(2) \qquad 4 \sin^3 \frac{a}{3} - 3 \sin \frac{a}{3} + \sin a = 0,$$

qui donne $\sin \frac{a}{3}$, connaissant $\sin a$. Cette équation a exactement la même forme que l'équation (1) à laquelle nous a conduit le problème précédent. Les conclusions sont donc toutes semblables. On trouve trois valeurs pour $\sin \frac{a}{3}$ dont la somme est nulle; et six valeurs, deux à deux égales et de signes contraires, pour $\cos \frac{a}{3}$.

Ces résultats s'expliquent comme précédemment. En particulier, dans l'interprétation géométrique, on trouve encore que tous les tiers des arcs ayant même sinus sont terminés en six points qui sont les sommets de deux triangles équilatéraux symétriques par rapport à oy. Ceci tient, au fond, à ce que les deux arcs $\frac{2\pi}{3} - \frac{a}{3}$ et $\frac{\pi}{3} + \frac{a}{3}$ sont supplémentaires et, par suite, que l'un des sommets de l'un des triangles est symétrique d'un sommet de l'autre.

Nous laissons au lecteur le soin de faire ces discussions.

195. Problème III. — *Calculer les lignes trigonométriques des arcs* $\frac{a}{3}$, *connaissant* $tg\, a$.

Écrivons la formule qui donne $\operatorname{tg} 3\alpha$ en fonction de $\operatorname{tg}\alpha$ (nº 191):

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha},$$

et, dans cette égalité, faisons $\alpha = \frac{a}{3}$. Nous obtenons, après avoir chassé les dénominateurs, l'équation

$$(3) \qquad \operatorname{tg}^3\frac{a}{3} - 3\operatorname{tg} a \operatorname{tg}^2\frac{a}{3} - 3\operatorname{tg}\frac{a}{3} + \operatorname{tg} a = 0,$$

qui donne $\operatorname{tg}\frac{a}{3}$ en fonction de $\operatorname{tg} a$.

Cette équation a trois racines réelles. Substituons, en effet, à $\operatorname{tg}\frac{a}{3}$, dans le premier membre, $-\infty$, $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $+\infty$: on sait que, si l'on substitue, dans le premier membre d'un polynôme entier, un nombre très grand en valeur absolue, le polynôme prend le signe de son terme de degré le plus élevé [1].

On a donc :

pour $-\infty$	:	le signe	$-$,
pour $-\frac{1}{\sqrt{3}}$	:	$-\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{3}}$, qui a le signe	$+$,
pour $\frac{1}{\sqrt{3}}$	:	$\frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{3}}$, qui a le signe	$-$,
pour $+\infty$	:	le signe	$+$.

L'alternance des signes de ces substitutions nous prouve que l'équation

(1) Voir dans mes *Leçons d'Algèbre* le nº 113, Application II.

a trois racines réelles : une première plus petite que $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; une seconde comprise entre $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}$; une troisième plus grande que $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Il y a donc toujours trois valeurs pour $\operatorname{tg}\frac{a}{3}$. Connaissant ces valeurs, on aura, facilement, $\cos\frac{a}{3}$ et $\sin\frac{a}{3}$ par les formules :

$$\cos\frac{a}{3} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{a}{3}}}, \qquad \sin\frac{a}{3} = \pm\frac{\operatorname{tg}\frac{a}{3}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{a}{3}}}.$$

Il y a donc six valeurs, deux à deux égales et de signes contraires, pour le cosinus ; et de même pour le sinus.

Ces résultats étaient faciles à prévoir.

Tous les arcs admettant même tangente que l'arc a sont, en effet, compris dans la formule [**25**]

$$k\pi + a,$$

où k est un entier, positif ou négatif. Les tiers de ces arcs sont donc compris dans la formule

$$k\frac{\pi}{3} + \frac{a}{3}.$$

Si k est un multiple de 3, $k = 3h$, on a

$$\operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{3}+\frac{a}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(h\pi+\frac{a}{3}\right) = \operatorname{tg}\frac{a}{3}.$$

Si k est un multiple de 3 plus 1, $k = 3h+1$, on a

$$\operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{3}+\frac{a}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(h\pi+\frac{\pi}{3}+\frac{a}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{a}{3}\right).$$

Enfin, si k est un multiple de 3 plus 2, $k = 3h+2$, on a

$$\operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{3}+\frac{a}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(h\pi+\frac{2\pi}{3}+\frac{a}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{a}{3}\right).$$

Il n'y a donc bien que trois valeurs pour les tangentes de tous ces arcs, qui sont :

$$\operatorname{tg}\frac{a}{3}, \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{a}{3}\right), \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{a}{3}\right).$$

On verrait, sans difficulté, que chacun des trois cas précédents donne deux valeurs égales et de signes contraires pour les cosinus et pour les sinus.

Géométriquement, voici comment les résultats s'interprètent.

Soit A un point pris, sur le cercle trigonométrique, pour origine des arcs ; $t't$ l'axe des tangentes relatif aux arcs d'origine A.

Prenons, sur $t't$ (*fig.* 57),

$$\overline{AT} = \operatorname{tg} a$$

et joignons T au centre O du cercle. Cette droite coupe le cercle en deux

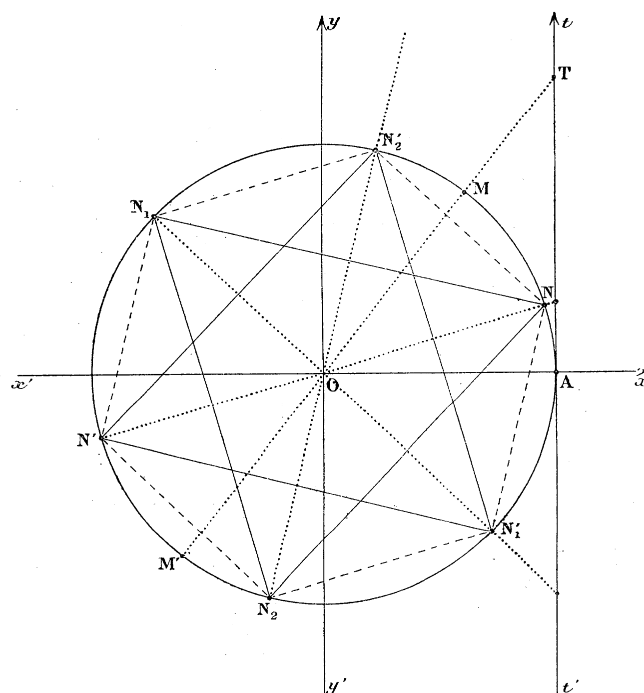


Fig. 57.

points, diamétralement opposés, M et M'. Tous les arcs qui admettent $\overline{AT}$ pour tangente sont terminés en M ou M'. Soit N l'extrémité du tiers du plus petit arc positif $\overset{\frown}{AM}$; les tiers de tous les arcs terminés en M ont pour extrémités les sommets d'un triangle équilatéral NN_1N_2. Ceci posé, remarquons que, si a est l'un des arcs terminés en M, $a + 3\pi$ aura son extrémité en M' et les tiers de ces deux arcs, qui sont $\frac{a}{3}$ et $\frac{a}{3} + \pi$, auront

leurs extrémités diamétralement opposées. Le point N′ diamétralement opposé à N est donc l'extrémité du tiers de l'un des arcs $\overset{\frown}{AM'}$. Il en résulte que les tiers de tous les arcs $\overset{\frown}{AM'}$ sont terminés aux sommets d'un triangle $N'N'_1N'_2$ symétrique du triangle NN_1N_2 par rapport au centre O. Les tiers de tous les arcs qui admettent $\overline{AT}$ pour tangente sont donc terminés aux sommets d'un hexagone régulier $N\,N_2'\,N_1\,N'\,N_2\,N'_1$ inscrit dans le cercle. Ces six points étant deux à deux diamétralement opposés, il y a *trois* valeurs pour les tangentes; et, respectivement, *six* valeurs, deux à deux égales et de signes contraires, pour les cosinus et les sinus.

196. Remarque. — Dans les trois problèmes précédents, nous nous sommes proposé de rechercher les lignes de *tous* les arcs qui sont les tiers de ceux qui admettent une ligne donnée. Si on spécifiait celui des arcs dont on veut calculer le tiers, il faudrait, parmi les diverses solutions, faire un choix. Ce choix sera toujours facile à faire, car on pourra toujours prévoir aisément quel est l'intervalle dans lequel se trouve la racine cherchée.

En effet, dans le cas des deux premiers problèmes, les racines sont séparées par les nombres $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$. Or (N° 72),

$$\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6},$$
$$-\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} = \sin\frac{7\pi}{6}.$$

Il n'y aura donc qu'à comparer l'arc dont on cherche les lignes à $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$ ou à $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{7\pi}{6}$.

Dans le cas où on donne la tangente, les racines de l'équation (3) sont séparées par $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Or,

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}, \qquad -\frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg}\frac{5\pi}{6};$$

il suffira donc, dans ce cas, de comparer l'arc à $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.

Voici des exemples de ce genre :

Exemple I. — *Sachant que* $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, *calculer* $\cos\frac{\pi}{12}$.

Posons $\cos\frac{\pi}{12} = x$; d'après le problème I du n° 193, x sera racine de l'équation

$$4x^3 - 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 .$$

Cette équation a pour solutions :

$$\cos\frac{\pi}{12}, \quad \cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{12}\right), \quad \cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{12}\right).$$

Or, comme on a :

$$0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{3},$$

il en résulte que

$$1 > \cos\frac{\pi}{12} > \frac{1}{2}.$$

Il faudra donc prendre celle des trois racines qui est comprise entre 1 et $\frac{1}{2}$.

Ces trois racines sont faciles à calculer. En effet, on a :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

L'équation doit donc admettre une première racine égale à $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Elle s'écrit, alors :

$$\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(4x^2 - 2\sqrt{2}\,x - 1\right) = 0 .$$

Les deux autres racines sont donc données par l'équation du second degré :

$$4x^2 - 2\sqrt{2}\,x - 1 = 0,$$

et, pour avoir $\cos\frac{\pi}{12}$, il faudra prendre la racine positive. On a donc, finalement,

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

Exemple II. — *Calculer* $\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}$, *sachant que*

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1.$$

Posons $\operatorname{tg}\frac{\pi}{24} = x$, et appliquons ici l'équation (3) du nº 195, nous aurons l'équation :

$$x^3 - 3(\sqrt{2}-1)\,x^2 - 3x + \sqrt{2} - 1 = 0.$$

Cette équation admet pour racines :

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{24}\right)=\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{24}\right)=\operatorname{tg}\frac{17\pi}{24}.$$

Comme

$$0<\frac{\pi}{24}<\frac{\pi}{6},$$

on a :

$$0<\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}<\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Il faut donc prendre la solution positive plus petite que $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Or, l'une des solutions de l'équation est connue, c'est :

$$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}=\sqrt{2}+1.$$

L'équation s'écrit, alors,

$$(x-\sqrt{2}-1)\left[x^2+2(2-\sqrt{2})x+2\sqrt{2}-3\right]=0.$$

$\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}$ est donc la racine positive de l'équation :

$$x^2+2(2-\sqrt{2})x+2\sqrt{2}-3=0.$$

On en conclut :

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}=\sqrt{2}-2+\sqrt{9-6\sqrt{2}}.$$

On a d'ailleurs, d'après une transformation connue,

$$\sqrt{9-6\sqrt{2}}=\sqrt{6}-\sqrt{3},$$

et, finalement,

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}=\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{3}-2.$$

197. Cas général. — Problème I. — *Calculer les lignes trigonométriques des arcs* $\frac{a}{m}$, *connaissant* $\cos a$.

Dans la formule [70] du n° 190 qui donne $\cos m\alpha$, connaissant $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$, faisons $\alpha=\frac{a}{m}$ et nous obtenons l'équation :

$$(1)\quad \cos^m\frac{a}{m}-C_m^2\cos^{m-2}\frac{a}{m}\sin^2\frac{a}{m}+C_m^4\cos^{m-4}\frac{a}{m}\sin^4\frac{a}{m}-\ldots=\cos a,$$

qui, jointe à la relation

$$\cos^2 \frac{a}{m} + \sin^2 \frac{a}{m} = 1,$$

permet de calculer $\cos \frac{a}{m}$ et $\sin \frac{a}{m}$.

Posons

$$\cos \frac{a}{m} = x,$$

nous aurons

$$\sin^2 \frac{a}{m} = 1 - x^2,$$

et, en portant ces valeurs dans l'égalité (1), nous obtenons finalement,

$$(2) \qquad x^m - C_m^2 x^{m-2}(1-x^2) + C_m^4 x^{m-4}(1-x^2)^2 - \dots - \cos a = 0,$$

qui est une équation de degré m en x.

Cette équation a m racines réelles comprises entre -1 et $+1$. Pour le vérifier, substituons, dans le premier membre, à x, successivement les $(m+1)$ nombres :

$$1, \ \cos \frac{\pi}{m}, \ \cos \frac{2\pi}{m}, \dots, \ \cos \frac{(m-1)\pi}{m}, \ -1.$$

Il est facile de voir que deux nombres consécutifs de cette suite donnent des résultats de substitution de signes contraires.

Si on remarque, en effet, qu'en vertu de la formule [**70**], on a :

$$\cos^m \frac{p\pi}{m} - C_m^2 \cos^{m-2} \frac{p\pi}{m} \sin^2 \frac{p\pi}{m} + C_m^4 \cos^{m-4} \frac{p\pi}{m} \sin^4 \frac{p\pi}{m} - \dots$$
$$= \cos p\pi = (-1)^p,$$

on en conclut que le résultat de substitution de $\cos \frac{p\pi}{m}$ à x dans le premier membre de (2) est :

$$(-1)^p - \cos a$$

et, par suite, a le signe de $(-1)^p$. En faisant, successivement, $p = 0$, $p = 1$, $p = 2$, ... $p = m - 1$, $p = m$, on a les $m + 1$ résultats de substitution des $m + 1$ nombres précédents qui, par suite, sont, alternativement, des signes $(+)$ et $(-)$. Il en résulte que, dans chacun des intervalles

$$\left(1, \cos \frac{\pi}{m}\right), \quad \left(\cos \frac{\pi}{m}, \ \cos \frac{2\pi}{m}\right), \ \dots \quad \left(\cos \frac{(m-1)\pi}{m}, \ -1\right),$$

il y a une racine de l'équation (2). Il y a donc bien m racines acceptables

pour x; donc m valeurs pour $\cos\frac{a}{m}$. A ces m valeurs, correspondent $2m$ valeurs pour le sinus, égales et de signes contraires, données par l'égalité

$$\sin\frac{a}{m} = \pm\sqrt{1-\cos^2\frac{a}{m}}\,;$$

par suite, $2m$ valeurs pour la tangente.

Pour expliquer ces résultats, faisons d'abord la remarque générale suivante, qui nous sera utile dans les deux problèmes que nous traiterons à la suite de celui-ci.

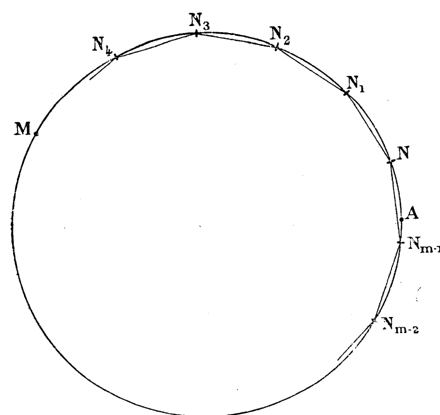


Fig. 58.

Considérons, sur un cercle orienté (*fig.* 58), tous les arcs $\overset{\frown}{AM}$ d'origine A et d'extrémité M. Marquons l'extrémité N de la $m^{ième}$ partie du plus petit arc positif $\overset{\frown}{AM}$. Les extrémités de tous les arcs $\frac{1}{m}\overset{\frown}{AM}$ sont les sommets d'un polygone régulier convexe $NN_1N_2N_3\ldots$ de m côtés, inscrit dans le cercle, et dont le premier sommet est N. Soit, en effet, a le plus petit arc positif $\overset{\frown}{AM}$. Les diverses déterminations de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ sont a, $a+2\pi$, $a+4\pi$, $a+6\pi$, etc., et les $m^{ièmes}$ parties de ces arcs sont

$$\frac{a}{m},\quad \frac{a}{m}+\frac{2\pi}{m},\quad \frac{a}{m}+\frac{4\pi}{m},\quad \frac{a}{m}+\frac{6\pi}{m},\ \text{etc.}$$

L'arc $\frac{a}{m}$ est terminé en N. L'extrémité de l'arc $\frac{a}{m}+\frac{2\pi}{m}$ s'obtient en prenant un arc NN_1 égal à $\frac{2\pi}{m}$ c'est-à-dire à la $m^{ième}$ partie de la circonférence. Pour avoir l'extrémité N_2 de l'arc $\frac{a}{m}+\frac{4\pi}{m}$, il faut augmenter l'arc précédent d'un arc N_1N_2 égal encore à $\frac{2\pi}{m}$; et ainsi de suite. Au bout de m opérations, on revient au point N et le polygone $NN_1N_2\ldots$ est évidemment un polygone régulier convexe de m côtés, puisque les arcs sous-tendus sont égaux, chacun, à la $m^{ième}$ partie de la circonférence.

Ceci posé, soit, sur un cercle trigonométrique O, un point A pris pour

origine des arcs (*fig.* 59); ox, oy les axes des cosinus et des sinus relatifs à ces arcs. Prenons, sur ox,

$$\overline{\mathrm{OP}} = \cos a,$$

et élevons, en P, une perpendiculaire à ox qui coupe le cercle en M et M′. Soit N l'extrémité de la $m^{ième}$ partie du plus petit arc positif $\overset{\frown}{\mathrm{AM}}$; le point N′

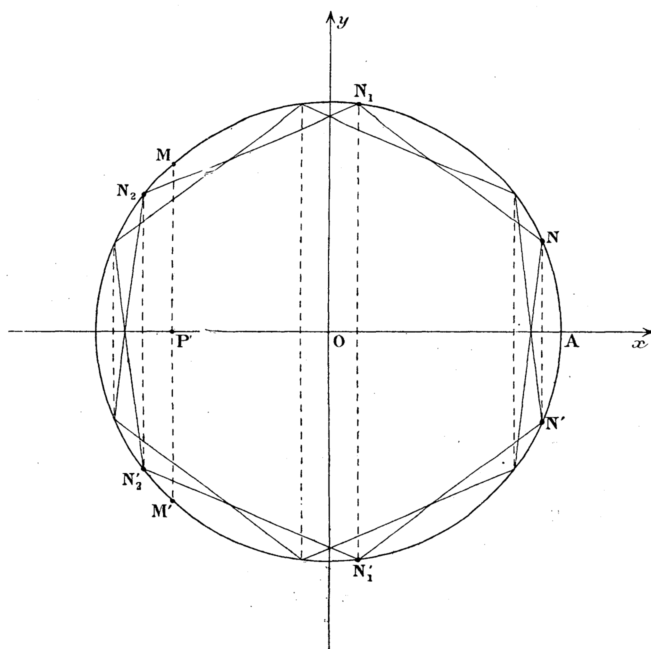


Fig. 59.

symétrique de N par rapport à ox, sera évidemment l'extrémité de la $m^{ième}$ partie de l'arc négatif $\overset{\frown}{\mathrm{AM'}}$ de plus petite valeur absolue.

Les extrémités des $m^{ièmes}$ parties de tous les arcs terminés en M et M′ seront donc les sommets de deux polygones réguliers convexes de m côtés $NN_1N_2\ldots$, $N'N'_1N'_2\ldots$, inscrits dans le cercle. Les deux sommets N et N′ étant symétriques par rapport à ox, tous les sommets de ces deux polygones sont, deux à deux, symétriques par rapport à ox; ils ont donc, deux à deux, mêmes projections sur ox et des projections symétriques par rapport à o sur oy. Il n'y a donc que m valeurs pour les cosinus des arcs terminés en N, N_1, N_2, ... N′, N'_1, N'_2, ... et $2m$ valeurs, deux à deux égales et de signes contraires, pour les sinus.

On aurait encore pu interpréter les résultats de la façon suivante.

Les $m^{\text{ièmes}}$ parties de tous les arcs ayant même cosinus que l'arc a sont compris dans la formule

$$\frac{2k\pi}{m} \pm \frac{a}{m},$$

où k est un entier, positif ou négatif.

Si k est un multiple de m, $k = hm$, on a :

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{m} \pm \frac{a}{m}\right) = \cos\left(2h\pi \pm \frac{a}{m}\right) = \cos\frac{a}{m},$$
$$\sin\left(\frac{2k\pi}{m} \pm \frac{a}{m}\right) = \sin\left(2h\pi \pm \frac{a}{m}\right) = \pm \sin\frac{a}{m}.$$

Si k est un multiple de m plus 1, $k = hm + 1$, on a :

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{m} \pm \frac{a}{m}\right) = \cos\left(2h\pi + \frac{2\pi}{m} \pm \frac{a}{m}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{m} \pm \frac{a}{m}\right),$$
$$\sin\left(\frac{2k\pi}{m} \pm \frac{a}{m}\right) = \sin\left(2h\pi + \frac{2\pi}{m} \pm \frac{a}{m}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{m} \pm \frac{a}{m}\right).$$

Si k est un multiple de m plus 2, $k = hm + 2$, on a :

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{m} \pm \frac{a}{m}\right) = \cos\left(2h\pi + \frac{4\pi}{m} \pm \frac{a}{m}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{m} \pm \frac{a}{m}\right),$$
$$\sin\left(\frac{2k\pi}{m} \pm \frac{a}{m}\right) = \sin\left(2h\pi + \frac{4\pi}{m} \pm \frac{a}{m}\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{m} \pm \frac{a}{m}\right).$$

Et ainsi de suite; finalement, lorsque k est un multiple de m plus $(m-1)$, $k = hm + m - 1$, on a :

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{m} \pm \frac{a}{m}\right) = \cos\left(2h\pi + \frac{2(m-1)\pi}{m} \pm \frac{a}{m}\right) = \cos\left(\frac{2(m-1)\pi}{m} \pm \frac{a}{m}\right),$$
$$\sin\left(\frac{2k\pi}{m} \pm \frac{a}{m}\right) = \sin\left(2h\pi + \frac{2(m-1)\pi}{m} \pm \frac{a}{m}\right) = \sin\left(\frac{2(m-1)\pi}{m} \pm \frac{a}{m}\right).$$

Il semble, ainsi, qu'il y ait $2m - 1$ valeurs pour le cosinus, mais il est facile de voir qu'il n'y en a que m différentes. En effet, p étant un entier positif plus petit que m, la somme des deux arcs :

$$\frac{2p\pi}{m} + \frac{a}{m} \quad \text{et} \quad \frac{2(m-p)\pi}{m} - \frac{a}{m}$$

est égale à 2π. Ces deux arcs ont donc même cosinus et des sinus égaux et de signes contraires. Il y a donc m valeurs pour les cosinus qui sont :

$$\cos\frac{a}{m}, \ \cos\left(\frac{2\pi}{m} + \frac{a}{m}\right), \ \cos\left(\frac{4\pi}{m} + \frac{a}{m}\right), \ \ldots \ \cos\left(\frac{2(m-1)\pi}{m} + \frac{a}{m}\right);$$

et $2m$ valeurs pour les sinus,

$$\pm \sin \frac{a}{m}, \quad \pm \sin \left(\frac{2\pi}{m} + \frac{a}{m}\right), \quad \pm \sin \left(\frac{4\pi}{m} + \frac{a}{m}\right), \quad \ldots \pm \sin \left(\frac{2(m-1)\pi}{m} + \frac{a}{m}\right),$$

deux à deux égales et de signes contraires.

198. Problème II. — *Calculer les lignes trigonométriques des arcs* $\frac{a}{m}$, *connaissant* $\sin a$.

Dans la formule [**71**] du n° 190, faisons $\alpha = \frac{a}{m}$ et nous obtenons l'équation :

$$(3) \quad C_m^1 \cos^{m-1} \frac{a}{m} \sin \frac{a}{m} - C_m^3 \cos^{m-3} \frac{a}{m} \sin^3 \frac{a}{m} + C_m^5 \cos^{m-5} \frac{a}{m} \sin^5 \frac{a}{m} - \ldots - \sin a = 0,$$

qui, avec la relation

$$\cos^2 \frac{a}{m} + \sin^2 \frac{a}{m} = 1,$$

permet de calculer $\cos \frac{a}{m}$ et $\sin \frac{a}{m}$, connaissant $\sin a$.

Il y a, alors, deux cas à distinguer suivant la parité du nombre m,

1° m *est impair*. — Soit

$$m = 2m' + 1.$$

Dans ce cas, l'équation (3) ne contient que des puissances paires de $\cos \frac{a}{m}$ et peut s'écrire :

$$C_m^1 \cos^{2m'} \frac{a}{m} \sin \frac{a}{m} - C_m^3 \cos^{2(m'-1)} \frac{a}{m} \sin^3 \frac{a}{m} + \cdots + (-1)^{m'} C_m^m \sin^m \frac{a}{m} - \sin a = 0.$$

Posons, alors,

$$\sin \frac{a}{m} = x,$$

nous aurons

$$\cos^2 \frac{a}{m} = 1 - x^2,$$

et l'équation (3) s'écrit, enfin, en multipliant les deux membres par $(-1)^{m'}$ et intervertissant l'ordre des termes,

$$(4) \quad x^m - C_m^2 x^{m-2} (1 - x^2) + \cdots + (-1)^{m'} C_m^1 x (1 - x^2)^{m'} - (-1)^{m'} \sin a = 0.$$

C'est une équation de degré m en x ayant exactement la même forme que l'équation (2) obtenue dans le problème précédent (n° 197); elle a donc m racines séparées par les nombres

$$+1,\ \cos\frac{\pi}{m},\ \cos\frac{2\pi}{m},\ldots\ \cos\frac{(m-1)\pi}{m},\ -1.$$

Il y a, par suite, m valeurs pour les sinus ; et $2m$ valeurs deux à deux égales et de signes contraires pour les cosinus données par la formule :

$$\cos\frac{a}{m} = \pm\sqrt{1-x^2}.$$

2° m *est pair.* — Soit

$$m = 2m'.$$

L'équation (3) ne contient alors que des puissances impaires, aussi bien de $\cos\frac{a}{m}$ que de $\sin\frac{a}{m}$. Le premier membre de cette équation n'est donc entier ni en $\cos\frac{a}{m}$ ni en $\sin\frac{a}{m}$, et il faut nécessairement faire une élévation au carré pour obtenir une équation entière. Cette équation s'écrit :

$$\cos\frac{a}{m}\Big[C_m^1\cos^{2m'-2}\frac{a}{m}\sin\frac{a}{m} - C_m^3\cos^{2m'-4}\frac{a}{m}\sin^3\frac{a}{m}+\cdots \\ +(-1)^{m'-1}C_m^{m-1}\sin^{m-1}\frac{a}{m}\Big] = \sin a.$$

Posons :

$$\sin\frac{a}{m} = x,$$

par suite,

$$\cos\frac{a}{m} = \pm\sqrt{1-x^2},$$

et nous aurons :

$$(4^{bis})\quad \pm\sqrt{1-x^2}\Big[C_m^1(1-x^2)^{m'-1}x - C_m^3(1-x^2)^{m'-2}x^3+\ldots.. \\ +(-1)^{m'-1}C_m^{m-1}x^{m-1}\Big] = \sin a.$$

Élevons au carré les deux membres, ce qui n'introduira pas de solutions étrangères, à cause du double signe, et nous obtenons, finalement, l'équation :

$$(5)\quad (1-x^2)\Big[C_m^1(1-x^2)^{m'-1}x - C_m^3(1-x^2)^{m'-2}x^3+\ldots.. \\ +(-1)^{m'-1}C_m^{m-1}x^{m-1}\Big]^2 - \sin^2 a = 0,$$

qui est de degré $2m$ en x. Elle a $2m$ racines réelles qui sont faciles à séparer. En effet, substituons à x, dans le premier membre, $\cos\frac{p\pi}{2m}$, p étant un entier quelconque.

Le résultat de substitution est, comme il est facile de le vérifier,

$$\sin^2\frac{p\pi}{2} - \sin^2 a.$$

Lorsque p est pair, le résultat de substitution est égal à $-\sin^2 a$, donc négatif. Lorsque p est impair, ce résultat est égal à $1 - \sin^2 a = \cos^2 a$, donc positif. Si donc on substitue les $(2m+1)$ nombres décroissants,

$$1, \quad \cos\frac{\pi}{2m}, \quad \cos\frac{2\pi}{2m}, \quad \cos\frac{3\pi}{2m}, \quad \ldots, \quad \cos\frac{(2m-1)\pi}{2m}, \quad -1,$$

les résultats de substitution seront, alternativement, négatifs et positifs, et il en résulte, qu'entre deux nombres consécutifs de cette suite, il y a toujours une racine de l'équation (5).

Comme x ne figure qu'à des puissances paires, il y a donc toujours $2m$ valeurs, deux à deux égales et de signes contraires, pour $\sin\frac{a}{m}$. Il y a aussi $2m$ valeurs pour $\cos\frac{a}{m}$, car à chaque valeur de x ne correspond qu'une valeur pour $\cos\frac{a}{m}$.

En effet, on a :

$$\cos\frac{a}{m} = \pm\sqrt{1-x^2},$$

mais le signe qu'il faut choisir devant le radical est déterminé par le fait que l'équation (4bis) doit être vérifiée. On prendra donc ce signe tel que le premier membre de cette équation soit du signe de $\sin a$.

On peut remarquer que lorsqu'on change x en $-x$, le premier membre de l'équation (4bis) change de signe. A deux valeurs égales et de signes contraires de x, correspondent donc deux valeurs égales et de signes contraires de $\cos\frac{a}{m}$, par suite, la *même* valeur pour $\operatorname{tg}\frac{a}{m}$. Il n'y a donc que m valeurs pour les tangentes.

— Expliquons tous ces résultats.

Soit A, une origine, choisie arbitrairement pour les arcs, sur le cercle trigonométrique ; *ox* et *oy*, les axes des cosinus et des sinus des arcs d'origine A. Prenons (*fig.* 60 et 61), sur *oy*, un segment $\overline{OQ}$ égal à $\sin a$ et menons en Q la perpendiculaire à *oy* qui coupe le cercle en M et M′. Tous les arcs dont le sinus est $\overline{OQ}$ sont terminés en M et M′. Soit N l'extrémité de

la $m^{ième}$ partie du plus petit arc positif $\overset{\frown}{AM}$. Les $m^{ièmes}$ parties de tous les arcs terminés en M auront pour extrémités les sommets d'un polygone régulier de m côtés, inscrit dans le cercle, NN_1N_2...

Cela étant, distinguons deux cas :

1° m *est impair.* — Dans ce cas, a étant le plus petit arc positif $\overset{\frown}{AM}$, l'arc $m\pi - a$ est terminé en M'. Les $m^{ièmes}$ parties de ces deux arcs sont

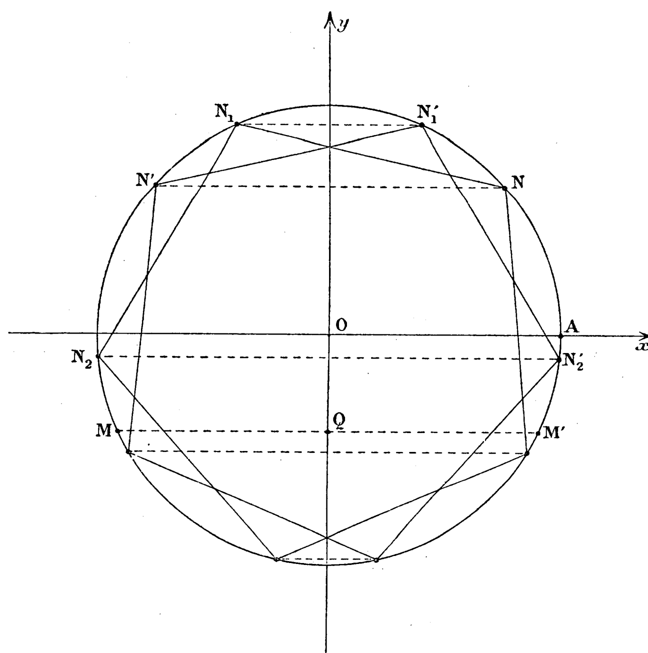


Fig. 60.

$\frac{a}{m}$ et $\pi - \frac{a}{m}$ et, par suite, sont terminées en des points N et N' (*fig.* 60) symétriques par rapport à oy. Tous les arcs terminés en M' ont donc pour $m^{ièmes}$ parties des arcs terminés aux sommets d'un polygone régulier de m côtés, $N'N_1'N_2'$... symétrique du polygone NN_1N_2... par rapport à oy. Les $2m$ sommets des deux polygones se projettent donc, deux par deux, aux mêmes points sur oy et ont des projections deux à deux symétriques par rapport à o sur ox. Il y a m valeurs pour les sinus et $2m$ valeurs, deux à deux égales et de signes contraires, pour les cosinus.

2° m *est pair.* — Alors (*fig.* 61), il n'y a, dans le cas le plus général,

aucune relation de symétrie entre les deux polygones NN_1N_2... $N'N'_1N'_2$... par rapport aux axes ox et oy. Les $2m$ sommets des deux polygones se projettent donc en $2m$ points distincts sur ox et oy et il y a $2m$ valeurs pour les cosinus ainsi que pour les sinus. Ces $2m$ valeurs sont, deux à deux, égales et de signes contraires car, m étant pair, les sommets d'un *même* polygone NN_1N_2... sont deux à deux diamétralement opposés. Il en résulte qu'il n'y a bien que m valeurs pour les tangentes.

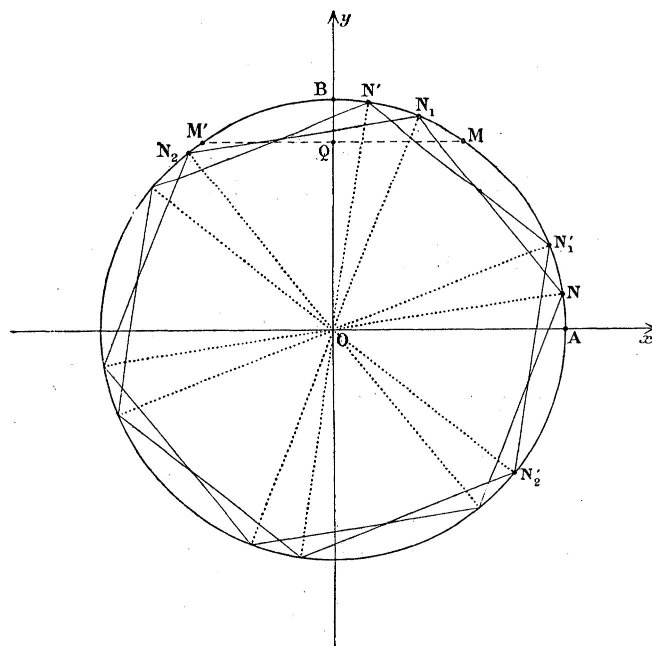


Fig. 61.

On peut cependant vérifier, sur la figure, un fait intéressant, c'est que les $2m$ valeurs des sinus sont les mêmes que les $2m$ valeurs des cosinus. En effet, si $\frac{m}{2}$ est impair et si a est un arc terminé en M, l'arc $\frac{m}{2}\pi - a$ est terminé en M'. Les $m^{ièmes}$ parties, $\frac{a}{m}$ et $\frac{\pi}{2} - \frac{a}{m}$, sont donc des arcs complémentaires. Les sommets du polygone $N'N'_1N'_2$... sont donc, respectivement, les extrémités des arcs complémentaires de ceux qui ont pour extrémités les sommets NN_1N_2.... du premier polygone.

Si $\frac{m}{2}$ est pair, a étant un arc $\overset{\frown}{AM}$, l'arc $\frac{m}{2}\pi + a$ est aussi terminé en M.

Les $m^{\text{ièmes}}$ parties, $\frac{a}{m}$ et $\frac{\pi}{2}+\frac{a}{m}$, sont terminées en deux sommets du même polygone NN_1N_2... Les arcs terminés aux sommets d'un *même* polygone ont donc pour les sinus et les cosinus la même série de valeurs.

Ce résultat serait d'ailleurs facile à vérifier sur l'équation (5) qui ne change pas quand on y remplace x par $\sqrt{1-x^2}$.

On pourrait encore ici interpréter les résultats d'une autre manière. Nous laissons au lecteur le soin de le faire, en suivant une marche identique à celle que nous avons suivie dans le problème précédent.

199. Problème III. — *Calculer les lignes trigonométriques des arcs* $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{m}}$, *connaissant* $\operatorname{tg} a$.

Dans la formule [**72**] du n° 190, remplaçons α par $\frac{a}{m}$, puis, chassons les dénominateurs. Nous obtiendrons ainsi l'équation

$$(6)\quad C_m^1 \operatorname{tg}\frac{a}{m} - C_m^3 \operatorname{tg}^3\frac{a}{m} + C_m^5 \operatorname{tg}^5\frac{a}{m} - \dots = \operatorname{tg} a\left[1 - C_m^2 \operatorname{tg}^2\frac{a}{m} + C_m^4 \operatorname{tg}^4\frac{a}{m} - \dots\right]$$

qui donne $\operatorname{tg}\frac{a}{m}$ en fonction de $\operatorname{tg} a$.

Posons

$$\operatorname{tg}\frac{a}{m} = x$$

et ordonnons l'équation suivant les puissances croissantes de x, elle s'écrit :

$$(7)\quad \operatorname{tg} a - C_m^1\, x - C_m^2 \operatorname{tg} a\cdot x^2 + C_m^3\, x^3 + C_m^4 \operatorname{tg} a\cdot x^4 - \dots = 0.$$

C'est une équation de degré m dont le dernier terme est :

$$\pm \operatorname{tg} a\cdot x^m, \text{ si } m \text{ est pair} \qquad \text{et} \qquad \pm x^m, \text{ si } m \text{ est impair.}$$

Elle a m racines que l'on pourrait séparer, comme nous l'avons fait dans le cas de la trisection, en substituant dans le premier membre de l'équation (7) les $(m+1)$ nombres

$$-\infty,\quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{m}\right),\quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{m}\right),\quad \dots\quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{(m-1)\pi}{m}\right),\quad +\infty$$

et vérifiant que les résultats sont, alternativement, de signes contraires.

L'interprétation suivante met, d'ailleurs, bien en évidence l'existence de ces m valeurs.

Soit $t't$ l'axe des tangentes (*fig.* 62) relatif aux arcs d'origine A. Prenons, sur $t't$, un segment $\overline{AT}$ égal à $\operatorname{tg} a$. Le diamètre du cercle trigonométrique qui passe par T a pour extrémités M et M′, qui sont les extrémités de tous les arcs d'origine A ayant $\overline{AT}$ pour tangente. Les $m^{ièmes}$ parties de tous les arcs terminés en M et en M′ ont pour extrémités les sommets de deux

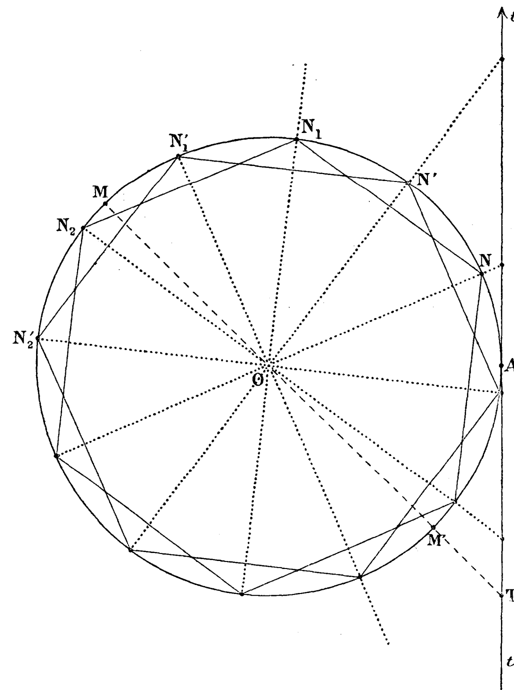


Fig. 62.

polygones $NN_1N_2...$, $N'N'_1N'_2...$, réguliers, de m côtés, inscrits dans le cercle.

1° *Si* m *est pair* (*fig.* 62), chacun des deux polygones ayant un nombre pair de côtés, ses sommets sont deux à deux diamétralement opposés. Les arcs terminés aux m sommets d'un même polygone n'ont donc que $\frac{m}{2}$ tangentes ; il y a donc m valeurs pour les tangentes.

2° *Si* m *est impair* (*fig.* 63), et si a est un arc terminé en M, $m\pi + a$ est un arc terminé en M′. Les $m^{ièmes}$ parties $\frac{a}{m}$ et $\pi + \frac{a}{m}$ sont donc des arcs terminés en des points N et N′ diamétralement opposés. Il en résulte que

les sommets des deux polygones $NN_1N_2...$, $N'N'_1N'_2...$ sont, deux à deux, diamétralement opposés, il n'y a donc encore que m tangentes.

FIG. 63.

Pour les sinus et les cosinus il y a, dans les deux cas, $2m$ valeurs, deux à deux égales et de signes contraires.

EXERCICES

89. Développer les formules qui donnent

$$\cos(a+b+c+d), \quad \sin(a+b+c+d)$$

en fonction des cosinus et sinus des arcs a, b, c, d.

90. Quelle relation existe-t-il entre les tangentes de m arcs dont la somme est nulle?

Réciproquement, cette relation, entre les tangentes, étant vérifiée, quelle relation existe-t-il entre les arcs?

Même question lorsque la somme des arcs est $\frac{\pi}{2}$.

91. Développer

$$\cos 5\alpha, \quad \sin 5\alpha, \quad \text{tg } 5\alpha,$$
$$\cos 6\alpha, \quad \sin 6\alpha, \quad \text{tg } 6\alpha,$$

en appliquant les formules du n° 190.

92. Sachant que

$$\sin \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

calculer les lignes de l'arc $\frac{\pi}{24}$. (Voir n° 196).

De même, sachant que

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4},$$

calculer les lignes de l'arc $\frac{\pi}{15}$.

93. Appliquer les problèmes généraux des n°s 197 à 199 au cas de $m = 5$.

Comme exemple numérique, calculer les lignes de l'arc $\frac{\pi}{15}$, sachant que

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Comparer les résultats à ceux du second exercice 92.

94. Démontrer, par une voie géométrique, que la somme des racines de l'équation qui donne $\cos \frac{a}{m}$, connaissant $\cos a$, est nulle.

(On prouvera, pour cela, que la somme géométrique des vecteurs obtenus en joignant le centre d'un polygone régulier à tous ses sommets est nulle).

CHAPITRE III

RACINE $m^{ième}$ D'UNE IMAGINAIRE. — ÉQUATIONS BINOMES

200. Racine $m^{ième}$ d'une imaginaire. — Trouver une *racine $m^{ième}$ d'une quantité imaginaire*, c'est trouver une autre quantité imaginaire dont la puissance $m^{ième}$ soit égale à la première.

La formule de Moivre [68] (n° 189) nous donne, immédiatement, la solution trigonométrique de cette question.

Supposons, en effet, qu'on ait mis la quantité imaginaire donnée sous forme trigonométrique,

$$r(\cos\alpha + i \sin\alpha),$$

et soit

$$\rho(\cos\omega + i \sin\omega)$$

une racine $m^{ième}$. On devra avoir l'égalité

$$[\rho(\cos\omega + i\sin\omega)]^m = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

qui, en vertu de la formule [**68**], s'écrit :

$$\rho^m (\cos m\omega + i \sin m\omega) = r (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

Comme il n'y a qu'une seule manière de mettre une quantité imaginaire sous forme trigonométrique, cette égalité ne peut avoir lieu que si les modules des deux membres sont égaux et les arguments congrus.

On doit donc avoir :

$$\rho^m = r, \qquad m\omega = \alpha + 2k\pi,$$

k étant un entier positif, négatif ou nul. On en tire pour ρ une seule valeur :

$$\rho = r^{\frac{1}{m}}$$

et pour ω une infinité de valeurs :

$$\omega = \frac{\alpha}{m} + \frac{2k\pi}{m}.$$

Toutes les racines $m^{\text{ièmes}}$ de la quantité complexe proposée sont donc comprises dans la formule :

$$[\mathbf{74}] \qquad r^{\frac{1}{m}} \left[\cos \left(\frac{\alpha}{m} + \frac{2k\pi}{m} \right) + i \sin \left(\frac{\alpha}{m} + \frac{2k\pi}{m} \right) \right].$$

Il est, d'abord, aisé de se rendre compte que, lorsqu'on donne à k toutes les valeurs entières positives, négatives ou nulles, possibles, cette formule fournit m racines différentes, et m seulement.

Remarquons, à cet effet, que si on donne à k deux valeurs qui diffèrent entre elles d'un multiple de m, les deux valeurs correspondantes [**74**] sont égales, car si k varie d'un multiple de m, $\frac{2k\pi}{m}$ varie d'un multiple de 2π et, l'argument de l'imaginaire [**74**] variant d'un multiple de 2π, cette quantité conserve la même valeur.

Donnons, alors, à k, m valeurs entières consécutives, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, (m-1)$, par exemple. Nous obtiendrons m racines qui seront certainement distinctes, car les arguments de deux de ces racines ne sont pas congrus. Si l'on donne, ensuite, à k, une valeur entière quelconque, on retrouvera certainement l'une de ces m racines, car tout nombre entier, positif ou négatif, ne diffère de l'un des nombres $0, 1, 2, \ldots, (m-1)$ que d'un multiple de m.

En résumé, *la quantité imaginaire*

$$r (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

a m *racines* m*ièmes* *et* m *seulement qui sont :*

$$r^{\frac{1}{m}}\left[\cos\frac{\alpha}{m}+i\sin\frac{\alpha}{m}\right],$$

$$r^{\frac{1}{m}}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{m}+\frac{2\pi}{m}\right)+i\sin\left(\frac{\alpha}{m}+\frac{2\pi}{m}\right)\right],$$

$$r^{\frac{1}{m}}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{m}+\frac{4\pi}{m}\right)+i\sin\left(\frac{\alpha}{m}+\frac{4\pi}{m}\right)\right],$$

$$\cdots\cdots$$

$$r^{\frac{1}{m}}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{m}+\frac{2(m-1)\pi}{m}\right)+i\sin\left(\frac{\alpha}{m}+\frac{2(m-1)\pi}{m}\right)\right].$$

Exemples. — 1° Toute quantité réelle a a m racines $m^{ièmes}$. — Si a est positif, on peut écrire (n° 184) :

$$a = a(\cos 0 + i \sin 0);$$

et les racines $m^{ièmes}$ sont :

$$a^{\frac{1}{m}}\left[\cos\frac{2k\pi}{m}\right]+i\sin\frac{2k\pi}{m}.$$

Si a est négatif, on peut écrire :

$$a = |a|(\cos\pi + i\sin\pi);$$

et les racines $m^{ièmes}$ sont :

$$|a|^{\frac{1}{m}}\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{m}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{m}\right].$$

2° La quantité i s'écrit :

$$i = \cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}.$$

Les racines $m^{ièmes}$ sont donc :

$$\cos\frac{(4k+1)\pi}{2m}+i\sin\frac{(4k+1)\pi}{2m}.$$

201. Équations binômes. — Résoudre une équation binôme

$$(1) \qquad x^m - a = 0,$$

où a est un nombre réel ou imaginaire, c'est trouver tous les nombres complexes x dont les puissances $m^{ièmes}$ sont égales à a. C'est donc chercher toutes les racines $m^{ièmes}$ de a. La résolution de l'équation binôme (1) et le

calcul des racines $m^{\text{èmes}}$ de a sont donc deux problèmes identiques. On en conclut que toute équation binôme a m racines distinctes, puisque tout nombre a a m racines $m^{\text{ièmes}}$.

Nous avons déjà montré en algèbre [1] que, dès qu'on connaît *une* racine de l'équation (1), on obtient toutes les autres en multipliant cette racine par toutes celles de l'équation binôme

$$(2) \qquad x^m - 1 = 0.$$

En effet, soit b une racine de l'équation (1),

$$b^m = a,$$

et x' une autre racine quelconque de la même équation. Posons :

$$\frac{x'}{b} = c, \qquad x' = bc.$$

Comme on a, par hypothèse,

$$b^m = a, \qquad x'^m = a,$$

on en conclut

$$\left(\frac{x'}{b}\right)^m = 1$$

ou

$$c^m = 1.$$

c est donc bien racine de l'équation (2).

Réciproquement, soit c une racine de l'équation (2), le produit bc sera une racine de (1) car, puisque

$$c^m = 1, \qquad b^m = a,$$

on a :

$$(bc)^m = b^m c^m = a.$$

L'étude de l'équation (1) se ramène donc à celle de l'équation (2).

Les racines des équations binômes de la forme (2) jouissent de propriétés remarquables que nous allons établir, en nous servant de la forme trigonométrique que nous leur avons donnée.

Dorénavant, nous désignerons par x_k la racine de l'équation

$$x^m - 1 = 0$$

dont l'expression est :

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m}.$$

(1) Voir, dans mes *Leçons d'Algèbre*, le n° 102.

On obtiendra, comme nous l'avons expliqué plus haut, les m racines de l'équation, c'est-à-dire les m racines, $m^{ièmes}$ de l'unité en donnant, à k, m valeurs entières consécutives, par exemple les valeurs 0, 1, 2, ... $(m-1)$. Les m racines seront, alors, désignées par la notation

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots x_{m-1}.$$

202. Théorème. — *Les racines imaginaires de l'équation binôme*

$$x^m - 1 = 0$$

sont, deux à deux, conjuguées.

En effet, considérons les deux racines x_p et x_{m-p}. On a :

$$x_p = \cos\frac{2p\pi}{m} + i\sin\frac{2p\pi}{m},$$

$$x_{m-p} = \cos\left[2\pi - \frac{2p\pi}{m}\right] + i\sin\left[2\pi - \frac{2p\pi}{m}\right] = \cos\frac{2p\pi}{m} - i\sin\frac{2p\pi}{m}.$$

On en conclut que x_{m-p} est conjugué de x_p. Ainsi, x_1 et x_{m-1}, x_2 et x_{m-2}, etc., sont conjugués. Il faut remarquer que, dans tous les cas, on a

$$x_0 = 1.$$

Si m est impair, c'est la seule racine réelle et toutes les autres sont imaginaires, conjuguées deux à deux.

Si m est pair, il y a une autre racine réelle qui est

$$x_{\frac{m}{2}} = -1,$$

qu'on peut considérer comme conjuguée d'elle-même. Il y a donc, dans ce cas, deux racines réelles, $+1$ et -1, et $m-2$ racines imaginaires, conjuguées deux à deux.

Exemples. — 1° L'équation

$$x^3 - 1 = 0$$

a trois racines :

$$x_0 = 1, \quad x_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$x_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2° L'équation

$$x^4 - 1 = 0$$

a quatre racines,

$$x_0 = 1, \qquad x_2 = -1,$$
$$x_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i,$$
$$x_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

203. Théorème. — *Le produit de plusieurs racines de l'équation*

$$x^m - 1 = 0$$

est aussi racine de cette équation.

Soient, en effet, x_{k_1}, x_{k_2}, ... x_{k_p}, avec nos notations habituelles, p racines de l'équation dont les arguments sont

$$\frac{2k_1\pi}{m}, \quad \frac{2k_2\pi}{m}, \quad \dots \quad \frac{2k_p\pi}{m}.$$

D'après le théorème du n° 187, le module du produit est 1 et l'argument est congru à la somme

$$\frac{2(k_1 + k_2 + \dots + k_p)\pi}{m}$$

des arguments. Ce produit est donc égal à la racine $x_{k_1+k_2+\dots+k_p}$.

Corollaire. — *Toute puissance entière et positive d'une racine de l'équation*

$$x^m - 1 = 0$$

est aussi racine de cette équation.

Car, d'après ce qui précède, on a

$$(x_k)^p = x_{kp}.$$

204. Théorème. — *Le quotient de deux racines de l'équation*

$$x^m - 1 = 0$$

est aussi racine de cette équation.

Car les deux racines x_k et x_h ayant pour module 1 et pour arguments $\frac{2k\pi}{m}$, $\frac{2h\pi}{m}$, leur quotient $\frac{x_k}{x_h}$ a pour module 1 et pour argument $\frac{2(k-h)\pi}{m}$. On a donc :

$$\frac{x_k}{x_h} = x_{k-h}.$$

En particulier, l'inverse d'une racine de l'équation est aussi une racine; car on a

$$\frac{1}{x_k} = \frac{x_0}{x_k} = x_{-k}.$$

Corollaire. — *Toute puissance entière négative de l'équation*

$$x^m - 1 = 0$$

est aussi racine de cette équation.

Car, d'après ce que nous venons de voir, on a :

$$(x_k)^{-m} = \left(\frac{1}{x_k}\right)^m = (x_{-k})^m = x_{-km}.$$

Remarque. — Le lecteur a, sans doute, été frappé par ce fait que les opérations effectuées sur les racines x_k de l'équation binôme

$$x^m - 1 = 0$$

jouissent des mêmes propriétés que les opérations effectuées sur les puissances d'un même nombre, l'indice k jouant le rôle d'un exposant. Cette analogie trouvera son explication dans le fait, que nous allons établir, que les diverses racines de cette équation sont les puissances d'un même nombre.

205. Racines primitives. — **Définition.** — *On appelle* racine primitive *d'une équation binôme*

$$x^m - 1 = 0$$

toute racine de cette équation qui n'est pas racine d'une équation binôme de même forme et de degré moindre.

L'existence des racines primitives sera établie par les propositions qui vont suivre.

Théorème. — *Toute racine d'une équation binôme*

$$(1) \qquad x^m - 1 = 0$$

est aussi racine de toute équation de même forme dans laquelle l'exposant de x est un multiple de m.

Cette proposition est presque évidente, car si α est une racine de l'équation (1), on a :

$$\alpha^m = 1,$$

donc :

$$(\alpha^m)^p = \alpha^{mp} = 1.$$

α est donc aussi racine de l'équation

$$x^{mp} - 1 = 0,$$

quel que soit l'entier p.

206. Théorème. — *Les racines communes à deux équations binômes*

$$(1) \qquad x^m - 1 = 0, \qquad (2) \qquad x^p - 1 = 0$$

sont toutes les racines de l'équation

$$(3) \qquad x^d - 1 = 0,$$

d *étant le plus grand commun diviseur des deux nombres* m *et* p.

Soient, en effet, x_k et x'_h deux racines des équations (1) et (2) dont les arguments sont $\frac{2k\pi}{m}$ et $\frac{2h\pi}{p}$. Pour que ces deux racines soient égales, il faut et il suffit, comme elles ont même module, que leurs arguments soient congrus. On doit donc avoir :

$$\frac{2k\pi}{m} = \frac{2h\pi}{p} + 2q\pi,$$

q étant un certain entier, positif ou négatif.

On en conclut :

$$\frac{k}{m} - \frac{h}{p} = q.$$

Soit d le plus grand commun diviseur de m et p, et m' et p' les quotients de ces deux nombres par d. L'égalité précédente s'écrit :

$$kp' - hm' = qm'p'd.$$

m' divise le second membre de cette égalité, il divise donc $kp' - hm'$, ce qui exige, puisqu'il divise hm', qu'il divise kp'. Or, m' étant premier avec p', ne peut diviser kp' sans diviser k, on a donc :

$$k = rm',$$

r étant un entier ; et, par suite,

$$\frac{k}{m} = \frac{rm'}{dm'} = \frac{r}{d}.$$

Il en résulte que

$$x_k = \cos\frac{2r\pi}{d} + i\sin\frac{2r\pi}{d},$$

et, par suite, que x_k est racine de l'équation (3).

Toute racine commune aux équations (1) et (2) est donc bien racine de l'équation (3).

D'ailleurs, réciproquement, toute racine de l'équation (3) est bien une racine commune des équations (1) et (2) puisque m et p sont des multiples de d (n° 205).

Corollaire I. — *Si* m *et* p *sont deux nombres premiers entre eux, les deux équations*

$$x^m - 1 = 0, \qquad x^p - 1 = 0$$

n'ont pas d'autre racine commune que la racine 1.

Car, dans ce cas, $d = 1$.

Corollaire II. — *Toute racine de l'équation*

$$x^m - 1 = 0,$$

qui n'est pas primitive, est racine d'une équation de même forme dans laquelle l'exposant de x *est un diviseur de* m.

Car α n'étant pas racine primitive de $x^m - 1 = 0$, est racine d'une certaine équation $x^p - 1 = 0$, p étant inférieur à m. Elle est donc aussi racine de l'équation

$$x^d - 1 = 0,$$

d étant le plus grand commun diviseur de m et p.

207. Théorème. — *On obtient toutes les racines primitives de l'équation binôme*

(1) $$x^m - 1 = 0,$$

en donnant à k, *dans la formule générale*

(2) $$x_k = \cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m},$$

des valeurs entières, positives, premières avec m *et plus petites que* m.

Cherchons, en effet, l'équation binôme

(3) $$x^p - 1 = 0$$

de degré moindre que vérifie une racine x_k. Or, pour que l'on ait

$$(x_k)^p = 1$$

il faut et il suffit que l'argument $\frac{2kp\pi}{m}$ de $(x_k)^p$ soit congru à zéro, c'est-à-dire que $\frac{kp}{m}$ soit *entier*.

Soit δ le plus grand commun diviseur de k et m, et k' et m' les quotients de ces deux nombres par δ, on a :

$$\frac{kp}{m} = \frac{k'p}{m'} = \textit{entier}.$$

Pour que m' divise $k'p$ il faut et il suffit, puisque k' et m' sont premiers entre eux, que p soit un multiple de m'. La plus petite valeur de p est donc m'. Nous arrivons donc au résultat intéressant que voici :

L'équation binome (3) *de plus faible degré que vérifie la racine* x_k *de l'équation* (1) *est celle dont le degré est* $\frac{m}{\delta}$, δ *étant le plus grand commun diviseur entre* m *et* k.

Pour que x_k soit racine primitive, il faut que l'équation (1) soit précisément l'équation binôme de degré moindre vérifiée par cette racine. Il faut donc et il suffit, pour cela, que l'on ait $\delta = 1$, c'est-à-dire que k soit premier avec m.

D'ailleurs, comme on obtient toutes les racines de l'équation (1) en donnant, à k, les valeurs $0, 1, 2, \ldots (m - 1)$, on aura toutes les racines primitives en prenant, pour k, ceux de ces nombres qui sont premiers avec m.

On peut remarquer que les racines primitives sont deux à deux conjuguées, car si k est premier avec m, il en est de même de $m - k$. Donc si x_k est une racine primitive, il en est de même de la racine conjuguée x_{m-k} (nº 202). Le nombre des racines primitives est donc toujours pair.

Corollaire. — *L'équation binôme*

$$x^m - 1 = 0$$

admet autant de racines primitives qu'il y a de nombres entiers positifs inférieurs à m *et premiers avec lui.*

208. Théorème. — *On obtient toutes les racines de l'équation binôme*

$$(1) \qquad x^m - 1 = 0,$$

en élevant une racine primitive quelconque à m *puissances entières consécutives.*

Soit, en effet, α une racine primitive de l'équation (1) et considérons les m puissances successives :

$$\alpha^q,\ \alpha^{q+1},\ \alpha^{q+2},\ \ldots\ \alpha^{q+m-1}.$$

D'après le corollaire du nº 203, tous ces nombres sont des racines de l'équation (1); pour prouver que ce sont *toutes* les racines, il suffit de prouver que ces m nombres sont différents. Soient, alors, α^{q+k}, α^{q+h}, k étant

supérieur à h, deux des nombres de cette suite, je dis qu'ils sont différents. Car, s'ils étaient égaux, on aurait :

$$\alpha^{q+k} - \alpha^{q+h} = \alpha^{q+h}[\alpha^{k-h} - 1] = 0.$$

Comme α^{q+h} est différent de zéro, ceci exigerait que l'on ait :

$$\alpha^{k-h} - 1 = 0.$$

Or, k et h étant au plus égaux à $m - 1$, il en est de même de $k - h$ et cette égalité exprimerait que α est racine d'une équation binôme de degré inférieur à m; ce qui n'est pas, puisque, par hypothèse, α est une racine primitive.

En particulier, les nombres

$$\alpha^0 = 1, \ \alpha, \alpha^2, \ \ldots \ \alpha^{m-1}$$

sont les m racines de l'équation (1).

Remarque I. — Les puissances successives d'une racine quelconque α de l'équation (1) forment une suite périodique; le nombre des termes de la période est le degré de l'équation binôme de degré moindre que vérifie la racine α.

En effet, si

$$x^p - 1 = 0 \qquad (2)$$

est l'équation de degré moindre que vérifie le nombre α, ce nombre est une racine primitive de cette équation. Dans la suite indéfinie

$$\alpha^0 = 1, \alpha, \alpha^2, \ldots \alpha^{p-1}, \alpha^p, \alpha^{p+1}, \ldots \alpha^{2p}, \alpha^{2p+1}, \ldots$$

les p premiers nombres sont différents; ce sont, comme nous venons de le voir, les p racines de l'équation (2). A partir de α^p, les termes se reproduisent dans le même ordre ; car

$$\alpha^p = 1, \quad \alpha^{p+1} = \alpha^p \cdot \alpha = \alpha, \quad \alpha^{p+2} = \alpha^p \alpha^2 = \alpha^2, \quad \ldots.$$

Plus généralement, k étant un entier, positif ou négatif,

$$\alpha^{kp} = (\alpha^p)^k = 1^k = 1, \quad \alpha^{kp+1} + \alpha^{kp}\alpha = \alpha, \ \ldots. \ \alpha^{kp+h} = \alpha^{kp}\alpha^h = \alpha^h.$$

Remarque II. — La racine

$$x_1 = \cos\frac{2k\pi}{m} + i \sin\frac{2k\pi}{m}$$

est certainement une racine primitive de l'équation (1) ; il résulte de là que les m racines de cette équation sont :

$$1, \quad x_1, \quad x_1^2, \quad \ldots \quad x_1^{m-1}.$$

Ceci, d'ailleurs, résulterait encore de ce fait que (nº 203)

$$(x_1)^k = x_k.$$

EXEMPLES. — 1° L'équation binôme

$$x^3 - 1 = 0$$

a deux racines primitives :

$$x_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$x_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Désignons l'une d'elles par j, l'autre sera égale à j^2. Les trois racines sont donc :

$$j^0 = 1, \quad j, \quad j^2.$$

2° L'équation

$$x^4 - 1 = 0$$

a deux racines primitives :

$$x_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i,$$
$$x_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

Les quatre racines de l'équation sont donc les quatre premières puissances de i ou de $-i$.

$$i^0 = 1, \quad i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i.$$

209. Théorème. — p *et* q *étant deux nombres entiers, premiers entre eux, on obtient toutes les racines de l'équation*

$$(1) \qquad x^{pq} - 1 = 0,$$

en multipliant, respectivement, toutes les racines de l'équation

$$(2) \qquad x^p - 1 = 0,$$

par celles de l'équation

$$(3) \qquad x^q - 1 = 0.$$

De plus, on obtient toutes les racines primitives de l'équation (1) *en multipliant entre elles les racines primitives des équations* (2) *et* (3).

Soient, en effet,

$$x_k = \cos\frac{2k\pi}{p} + i\sin\frac{2k\pi}{p},$$
$$x'_h = \cos\frac{2h\pi}{q} + i\sin\frac{2h\pi}{q},$$

deux racines des équations (2) et (3). Leur produit a pour argument

$$\frac{2k\pi}{p} + \frac{2h\pi}{q} = \frac{2(kq+hp)\pi}{pq},$$

ce qui prouve qu'il est racine de l'équation (1).

Réciproquement, soit

$$X_r = \cos\frac{2r\pi}{pq} + i\sin\frac{2r\pi}{pq}$$

une racine de l'équation (1).

On pourra toujours trouver deux nombres entiers k et h tels que l'on ait :

$$\frac{2k\pi}{p} + \frac{2h\pi}{q} = \frac{2r\pi}{pq}$$

ou

$$kq + hp = r, \tag{4}$$

car, d'après un théorème d'arithmétique [1] connu, on sait que, p et q étant *premiers entre eux*, on peut toujours trouver deux nombres k et h vérifiant l'égalité (4), r étant donné. k et h étant trouvés, on a donc :

$$X_r = x_k x'_h.$$

La première partie de la proposition est donc établie. Supposons, maintenant, k premier avec p et h premier avec q, $kq + hp$ sera premier avec pq. S'il existait, en effet, un diviseur *premier* d, commun à $kq + hp$ et pq, ce diviseur devrait diviser p ou q. Par exemple, supposons qu'il divise p; il divisera alors hp et, divisant aussi $kq + hp$, il devrait diviser kq. Divisant kq, il diviserait soit k, soit q, ce qui n'est pas possible puisque k et q sont, tous deux, premiers avec p.

Réciproquement, si r est premier avec pq, les deux nombres k et h qui vérifient l'équation (4) sont aussi premiers l'un avec p, l'autre avec q. Car si, par exemple, k avait un diviseur commun avec p, ce diviseur diviserait kq et hp, donc r, et r aurait un diviseur commun avec p (ou pq), ce qui n'est pas. Il résulte de là que le produit de deux racines x_k, x'_h *primitives* des équations (2) et (3) est une racine *primitive* de (1) et que, récipro-

[1] Voir, dans les *Leçons d'Arithmétique* de M. Tannery, les n°s 509-511.

quement, toute racine *primitive* X_r de (1) est le produit de deux racines *primitives* de (2) et (3).

Corollaire I. — $p_1, p_2, \dots p_k$ *étant* k *nombres entiers premiers deux à deux et* m *leur produit, on obtient toutes les racines de l'équation*

$$x^m - 1 = 0,$$

en faisant tous les produits obtenus, en prenant, de toutes les façons possibles, k *racines des équations*

$$x^{p_1} - 1 = 0, \quad x^{p_2} - 1 = 0, \quad \dots \quad x^{p_k} - 1 = 0.$$

En particulier, on obtient les racines primitives en faisant les produits des racines primitives.

Corollaire II. — *Pour résoudre l'équation binôme*

$$x^m - 1 = 0,$$

il suffit de résoudre les équations de même forme obtenues en remplaçant l'exposant m *successivement par ses facteurs premiers affectés de leurs exposants respectifs.*

Ainsi, par exemple, pour résoudre l'équation

$$x^{60} - 1 = 0,$$

il suffit de résoudre les trois équations

$$x^4 - 1 = 0,$$
$$x^3 - 1 = 0,$$
$$x^5 - 1 = 0;$$

et de faire les produits des racines de toutes les manières possibles.

Remarque. — Le théorème précédent se rattache à une intéressante proposition d'arithmétique.

Désignons par $\varphi(m)$ [1] le nombre des nombres premiers avec m et au plus égaux à m.

Il résulte, de ce qui précède, que le nombre des racines primitives de l'équation

$$x^m - 1 = 0$$

est $\varphi(m)$. p étant premier avec q, le nombre des racines primitives de l'équation

$$x^{pq} - 1 = 0$$

(1) Voir, dans les *Leçons d'Arithmétique* de M. Tannery, les n°s 527-529.

est, d'une part, $\varphi(pq)$; d'autre part, ce nombre est aussi $\varphi(p) \times \varphi(q)$, puisque les nombres des racines primitives des équations

$$x^p - 1 = 0, \ x^q - 1 = 0$$

sont $\varphi(p)$ et $\varphi(q)$. On a donc :

$$\varphi(pq) = \varphi(p)\,\varphi(q).$$

Cette proposition suffit pour trouver l'expression de $\varphi(m)$ lorsque m est décomposé en facteurs premiers.

Exemple. — L'équation

$$x^3 - 1 = 0$$

a trois racines $1, j, j^2$, dont deux j et j^2 sont primitives. L'équation

$$x^4 - 1 = 0$$

a quatre racines $1, i, -1, -i$, dont deux $i, -i$, sont primitives.

L'équation

$$x^{12} - 1 = 0$$

a donc douze racines :

$$\begin{array}{llll} 1, & i, & -1, & -i, \\ j, & ij, & -j, & -ij, \\ j^2, & ij^2, & -j^2, & -ij^2, \end{array}$$

dont quatre sont primitives :

$$\begin{array}{ll} ij, & -ij, \\ ij^2, & -ij^2. \end{array}$$

Ces quatre racines primitives sont donc de la forme :

$$\pm \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2}.$$

210. Polygones réguliers. — Il existe, entre le problème de l'inscription des polygones réguliers et celui de la résolution des équations binômes de la forme

$$(1) \qquad x^m - 1 = 0,$$

une relation intime.

Supposons, en effet, que, dans le cercle trigonométrique de rayon 1, on ait inscrit un polygone régulier de m côtés obtenu en divisant la circonférence en m parties égales et joignant les points de division de p en p

$\left(p\right.$ premier avec m et plus petit que $\left.\frac{m}{2}\right)$. Soit AM (*fig.* 64), un côté de ce polygone. L'arc AM a pour mesure $\frac{2p\pi}{m}$. Abaissons de M la perpendiculaire MP sur le rayon OA. Le segment $\overline{OP}$ sera le cosinus de l'arc AM. On a donc

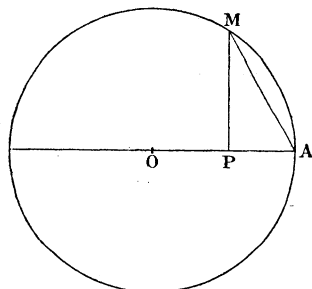


FIG. 64.

$$\overline{OP} = \cos \frac{2p\pi}{m}.$$

Dès qu'on connaît AM on connaît $\overline{OP}$ et, réciproquement, la connaissance de $\overline{OP}$ suffit à la détermination de AM.

Or, $\cos \frac{2p\pi}{m}$ est la partie réelle de la racine

$$x_p = \cos \frac{2p\pi}{m} + i \sin \frac{2p\pi}{m}$$

de l'équation (1). On voit donc que, dès qu'on sait résoudre cette équation, l'on sait aussi inscrire les polygones réguliers de m côtés.

Pour que AM soit bien le côté d'un polygone régulier de m côtés (et non de moins), il faut [1] que p soit premier avec m. Il suffit d'ailleurs, pour avoir tous les polygones réguliers de m côtés, de prendre, pour p, tous les nombres premiers avec m plus petits que $\frac{m}{2}$; car, en joignant de p en p et de $m-p$ en $m-p$, on obtient le même polygone. Ce fait résulte d'ailleurs de ce que les deux racines x_p et x_{m-p} sont conjuguées et, par suite, ont même partie réelle. Il s'ensuit qu'à tout couple de racines *primitives* conjuguées de l'équation (1), correspond un polygone régulier de m côtés et réciproquement.

Il y a autant de polygones réguliers de m *côtés qu'il y a de couples de racines primitives conjuguées de l'équation* (1). *Il y en a donc* $\frac{1}{2}\varphi(m)$. *Le calcul algébrique des racines primitives de l'équation* (1) *et l'inscription des polygones réguliers de* m *côtés sont deux problèmes du même ordre de difficulté. La résolution de l'un entraîne celle de l'autre.*

Dès qu'on a résolu l'équation (1), le calcul de la longueur du côté AM se fait sans difficulté, car on a :

$$AM = \sqrt{2\left(1 - \cos \frac{2p\pi}{m}\right)}.$$

(1) Voir, dans les *Leçons de Géométrie* de M. Hadamard, le chapitre VIII, n°s 160-176.

On peut, alors, former une équation ayant pour racines les diverses valeurs de AM. Remarquons, à cet effet, que l'on a

$$x_p = \cos \frac{2p\pi}{m} + i \sin \frac{2p\pi}{m}$$

et

$$\frac{1}{x_p} = x_{-p} = \cos \frac{2p\pi}{m} - i \sin \frac{2p\pi}{m}.$$

On en conclut :

$$x_p + \frac{1}{x_p} = 2 \cos \frac{2p\pi}{m}.$$

Si donc on pose :

$$y = x + \frac{1}{x},$$

dans l'équation (1), débarrassée au préalable de la racine 1 et de la racine -1 (si elle l'admet), on aura une équation en y qui a pour racines les diverses valeurs de $2 \cos \frac{2p\pi}{m}$. Nous poserons, dans cette nouvelle équation en y,

$$z = \sqrt{2-y},$$

c'est-à-dire

$$y = 2 - z^2$$

et nous aurons, finalement, une équation en z qui admettra pour racines les diverses valeurs de AM.

Si on ne voulait avoir que les côtés des polygones réguliers ayant *effectivement* m côtés, il faudrait faire les transformations qui précèdent sur l'équation obtenue en débarrassant l'équation (1) de toutes les racines non primitives.

On pourrait encore rattacher ce calcul, au moyen d'une remarque faite plus haut, à la résolution d'une équation binôme, d'une façon plus directe.

Nous avons montré, en effet, au n° 71, que le côté AM du polygone régulier inscrit de m côtés, obtenu en joignant de p en p, est le double du sinus du demi-arc sous-tendu. On a donc :

$$\text{AM} = 2 \sin \frac{p\pi}{m} = 2 \sin \frac{2p\pi}{2m}.$$

Or, $\sin \frac{2p\pi}{2m}$ est le coefficient de i dans la racine

$$x'_p = \cos \frac{2p\pi}{2m} + i \sin \frac{2p\pi}{2m}$$

de l'équation

$$(2) \qquad x^{2m} - 1 = 0.$$

Si donc on prend les doubles des parties imaginaires des racines x'_p de l'équation (2) (p premier avec m et plus petit que $\frac{m}{2}$), on aura les côtés de tous les polygones réguliers de m côtés. Les parties réelles donnent les apothèmes correspondants. Ainsi, $\cos \frac{2p\pi}{2m}$ est l'apothème du polygone régulier dont le côté est AM.

Nous avons montré, au n° 71, comment la connaissance des longueurs des côtés des polygones réguliers permettait de calculer les lignes des arcs $\frac{p\pi}{m}$. Ce qui précède nous montre comment, réciproquement, la connaissance de ces lignes ou, ce qui revient au même, la résolution de l'équation (2) permet de calculer ces côtés.

EXERCICES

95. Démontrer que les points représentatifs des m racines $m^{ièmes}$ d'une quantité imaginaire sont les sommets d'un polygone régulier de m côtés.

96. $a_1, a_2, \ldots a_p$, étant p quantités complexes fixes et z une quantité imaginaire variable, étudier la variation de l'argument de l'expression

$$\sqrt[m]{(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_p)},$$

lorsque le point dont z est l'affixe décrit une courbe fermée dans le plan. [*Comparer à l'exercice* 88].

97. Si on désigne par $z^{\frac{p}{q}}$ l'une quelconque des racines $q^{ièmes}$ de z^p, la formule de Moivre est-elle applicable pour

$$m = \frac{p}{q}\,?$$

Montrer que cette formule n'est plus exacte qu'à un multiplicateur près.

98. Résoudre, trigonométriquement, les équations binômes

$$x^5 - 1 = 0, \qquad x^{15} - 1 = 0, \qquad x^{80} - 1 = 0.$$

99. On considère l'équation qui donne $\cos\frac{\pi}{m}$, connaissant $\cos\pi = -1$. Mettre en évidence la relation qui existe entre la résolution de cette équation et l'inscription des polygones réguliers.

100. Comment trouve-t-on les racines communes à *plusieurs* équations binômes de la forme $x^m - 1 = 0$?

101. a étant un nombre premier absolu, et α un exposant entier, démontrer que toutes les racines non primitives de l'équation

$$x^{a^\alpha} - 1 = 0$$

sont les racines de l'équation

$$x^{a^{\alpha-1}} - 1 = 0.$$

CHAPITRE IV

RÉSOLUTION TRIGONOMÉTRIQUE DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ

211. Équation du second degré. — Nous avons, au n° 125, exposé deux méthodes pour la résolution trigonométrique des équations du second degré lorsque les racines sont *réelles*. Nous allons, pour compléter la question, montrer maintenant comment on peut calculer trigonométriquement les racines d'une telle équation lorsque ces racines sont *imaginaires*.

Soit

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1}$$

une équation de second degré, à coefficients a, b, c réels, mais dont les racines sont imaginaires; c'est-à-dire telle que

$$b^2 - 4ac < 0. \tag{2}$$

Ces deux racines sont, comme on sait, imaginaires conjuguées et on peut les mettre sous la forme :

$$(3) \quad \begin{cases} x' = \rho[\cos\varphi + i\sin\varphi], \\ x'' = \rho[\cos\varphi - i\sin\varphi]. \end{cases}$$

On peut toujours supposer que x' est la racine telle que le coefficient de i soit positif et, par conséquent, on peut toujours admettre que φ est un angle compris entre 0° et 180°.

Ceci posé, on a les relations :

$$x'x'' = \frac{c}{a},$$
$$x' + x'' = -\frac{b}{a},$$

qui donnent, en remplaçant x' et x'' par leurs valeurs (3),

$$\rho^2 = \frac{c}{a}, \qquad 2\rho\cos\varphi = -\frac{b}{a}.$$

On en tire, ρ étant essentiellement positif :

$$(4) \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{\dfrac{c}{a}}, \\ \cos\varphi = -\dfrac{b}{2a}\sqrt{\dfrac{a}{c}} = \dfrac{-\varepsilon b}{2\sqrt{ac}}, \end{cases}$$

ε étant égal à $+1$ ou -1 suivant que a est positif ou négatif.

Les formules (4), calculables par logarithmes, résolvent la question. Elles sont toujours acceptables. Car, d'une part, la condition (2) exige que $\frac{c}{a}$ et ac soient positifs ; d'autre part, cette même condition s'écrit :

$$\frac{b^2}{4ac} < 1 ;$$

ce qui exprime que le carré de la valeur de $\cos\varphi$ est plus petit que 1.

Elles donnent pour ρ et φ une seule valeur ; car, d'après ce que nous avons dit, on devra prendre pour φ la valeur comprise entre 0° et 180°, et il n'y en a qu'une.

Connaissant ρ et φ, on aura les parties réelles $\rho\cos\varphi$ et les parties imaginaires $\rho\sin\varphi$ de x' et x'' par des calculs logarithmiques.

212. Équation du troisième degré. — Une équation du troisième degré est, par définition, une équation qui, toutes réductions faites, peut se ramener à la forme :

$$(1) \qquad ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 .$$

Cette équation est susceptible d'une simplification importante que nous allons d'abord effectuer. Posons, à cet effet,

$$x = y + h ;$$

y sera racine de l'équation

$$a(y+h)^3 + b(y+h)^2 + c(y+h) + d = 0$$

ou :

$$ay^3 + [3ah + b]y^2 + [3ah^2 + 2bh + c]y + ah^3 + bh^2 + ch + d = 0 .$$

Choisissons le nombre h de façon à annuler le coefficient de y^2. Prenons, par suite,

$$h = -\frac{b}{3a}$$

et l'équation en y prendra, après avoir divisé les deux membres par a, la forme :

$$(2) \qquad y^3 + py + q = 0.$$

La résolution de l'équation (1) est ainsi ramenée à celle de l'équation (2) qui n'a pas de terme du second degré. A chaque racine y de l'équation (2) correspond une racine de l'équation (1) donnée par la formule :

$$x = y - \frac{b}{3a}.$$

213. Résolution algébrique. — Pour exposer les méthodes trigonométriques de résolution de l'équation du troisième degré, il nous faut reprendre rapidement la méthode classique de résolution algébrique.

Soit

$$(1) \qquad x^3 + px + q = 0$$

l'équation, ramenée à la forme simplifiée, p et q étant réels. Posons

$$(2) \qquad x = y + z .$$

On aura, entre y et z, la relation :

$$(3) \qquad y^3 + z^3 + q + (y+z)(3yz + p) = 0.$$

Comme l'inconnue x a été remplacée par *deux* inconnues y et z, on pourra les astreindre à vérifier une relation supplémentaire. Choisissons y et z de façon que, dans l'équation (3), le coefficient de $(y+z)$ soit nul. La résolution de l'équation (1) est ainsi ramenée à la recherche des solutions y et z des deux équations simultanées

$$(4) \quad \begin{cases} 3yz + p = 0 , \\ y^3 + z^3 + q = 0 . \end{cases}$$

A tout système de solutions y et z du système (4) correspond une solution x de l'équation (1) donnée par la formule (2).

Pour résoudre le système (4), écrivons-le sous la forme un peu plus générale

$$(4)^{bis} \quad \begin{cases} y^3z^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3, \\ y^3 + z^3 = -q . \end{cases}$$

Posons

$$(5) \qquad y^3 = \mathrm{Y}, \qquad z^3 = \mathrm{Z},$$

et nous aurons :

$$\mathrm{YZ} = -\left(\frac{p}{3}\right)^3, \qquad \mathrm{Y} + \mathrm{Z} = -q .$$

Y et Z sont donc les racines de l'équation du second degré

$$(6) \qquad \mathrm{X}^2 + q\mathrm{X} - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0 .$$

C'est ce qu'on appelle la *résolvante* de l'équation (1). Y et Z étant les deux racines de cette équation, on aura y et z en résolvant les équations binômes (5).

En fait, il vaudra mieux ne pas résoudre ces deux équations binômes et procéder de la façon suivante. Remarquons, en effet, que le système $(4)^{bis}$ est un peu plus général que le système (4) puisqu'il a été obtenu en élevant la première équation,

$$yz = -\frac{p}{3},$$

au cube. Pour ne pas avoir de solutions étrangères voici donc comment il faudra procéder :

Soit Y une racine de l'équation (6). On résout l'équation

$$y^3 = \mathrm{Y} .$$

A chaque racine y de cette équation on fait correspondre la valeur de z donnée par la première équation (4)

$$z = -\frac{p}{3y}$$

et on a une racine x de l'équation (1) :

$$x = y - \frac{p}{3y} .$$

Discussion. — Au premier abord, il semble que la résolution précédente fournisse six valeurs pour x, car l'équation (6) a deux racines qui donnent

chacune trois valeurs pour x. Il est facile de voir que chacune des racines de la résolvante fournit les *mêmes* racines pour x. Soient en effet, A et B les deux racines de l'équation (6). On a :

$$AB = -\left(\frac{p}{3}\right)^3$$

Soit a une des racines cubiques de A,

$$a^3 = A,$$

l'égalité précédente prouve que

$$B = -\left(\frac{p}{3a}\right)^3$$

et, par suite, que $-\frac{p}{3a}$ est l'une des racines cubiques de B.

La solution $y = a$, provenant de la racine A, donne, pour x, la valeur

$$x = a - \frac{p}{3a} \cdot$$

La solution $y = -\frac{p}{3a}$, provenant de la racine B, donne :

$$x = -\frac{p}{3a} - \frac{p}{3\left(-\frac{p}{3a}\right)} = -\frac{p}{3a} + a ,$$

donc, la *même* solution. Il suffit donc de prendre pour Y l'une des racines, A par exemple, de l'équation (6).

Ceci posé, a étant l'une des racines cubiques de A. Les trois racines de l'équation

$$y^3 = A$$

sont a, aj, aj^2 ; j et j^2 désignant, comme toujours, les deux racines cubiques imaginaires conjuguées de l'unité. Les trois racines de l'équation (1) sont donc :

$$a + b , \qquad aj + bj^2 , \qquad aj^2 + bj ,$$

en posant, pour abréger,

$$b = -\frac{p}{3a} \cdot$$

Pour reconnaître la nature de ces racines, distinguons trois cas :

1° *Les racines de la résolvante sont réelles et distinctes.* En d'autres termes, on a :

$$\left(\frac{q^2}{2}\right) + \left(\frac{p^3}{3}\right) > 0.$$

Nous pouvons, alors, prendre, pour a, la racine cubique réelle de A et b sera également réel. La racine $a + b$ est *réelle*. Les deux autres : $aj + bj^2$, $aj + bj^2$ sont *imaginaires* conjuguées.

2° *Les racines de la résolvante sont imaginaires.* On a donc

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0.$$

a étant l'une quelconque des racines cubiques imaginaires de A, il est aisé de voir que b sera l'imaginaire conjuguée de a. Car le produit ab est réel et, de plus, les cubes a^3 et b^3 sont imaginaires conjugués puisque

$$a^3 = \text{A}, \qquad b^3 = \text{B}.$$

a et b étant conjugués, aj et bj^2 le sont également, ainsi que aj^2 et bj.

Les trois racines sont, alors, réelles, puisque chacune d'elles est la somme de deux quantités imaginaires conjuguées.

3° *La résolvante a une racine double.* C'est-à-dire que l'on a :

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0.$$

On a, alors,

$$a = b = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}},$$

et l'équation (1) a une racine simple réelle

$$a + b = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}},$$

et une racine double réelle

$$aj + bj^2 = aj^2 + bj = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}\,(j + j^2) = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}.$$

Formule de Cardan. — De ce qui précède, on peut tirer une formule algébrique représentant les racines de l'équation (1).

L'une des racines de la résolvante est, en effet,

$$\text{Y} = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3};$$

on a, par suite :

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \qquad z = \frac{-p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}}.$$

La formule de résolution est donc la suivante :

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}},$$

dans laquelle on prend, successivement, les trois valeurs de la racine cubique.

En remarquant que z est l'une des racines cubiques de la seconde racine de la résolvante, on peut écrire ceci :

$$(7) \qquad x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Cette formule est connue sous le nom de *formule de Cardan*.

Les déterminations des deux racines cubiques doivent être choisies de façon que leur produit soit *réel*.

Au point de vue algébrique, la formule (7) ne peut servir que lorsqu'une seule des racines est réelle. Dans le cas où les trois racines de l'équation (1) sont réelles, elle devient illusoire.

En effet, la discussion précédente nous a montré que :

1° Si les racines de la résolvante sont réelles, une seule des trois racines est réelle. Dans ce cas, la formule (7) est applicable, car on est ramené à extraire deux racines cubiques de quantités réelles.

2° Si les deux racines de la résolvante sont imaginaires, la formule (7) conduit à l'extraction des racines cubiques de deux quantités imaginaires. *Au point de vue algébrique*, on est alors conduit à une impasse. Pour extraire, en effet, la racine cubique d'une quantité imaginaire, par une voie purement algébrique, on est amené à résoudre une équation du troisième degré dont les trois racines sont réelles. On revient précisément au problème qu'il s'agit de résoudre et la question n'a pas avancé d'un pas.

Dans ce cas, la trigonométrie nous permettra de sortir de cette impasse, puisque, comme nous l'avons vu, on peut toujours, trigonométriquement, extraire une racine cubique d'une quantité imaginaire.

214. Résolution trigonométrique. — La résolution de l'équation

$$(1) \qquad x^3 + px + q = 0$$

est, comme nous venons de le voir, ramenée aux calculs suivants : on résout la résolvante

$$(6) \qquad X^2 + qX - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0,$$

Soient Y et Z les racines de cette équation, on calcule les racines y et z des équations

$$(5) \qquad y^3 = Y, \qquad z^3 = Z,$$

et on associe deux racines y et z dont le produit est réel. On a, ainsi, une racine

$$x = y + z.$$

Appliquons, alors, à l'équation (6), les méthodes que nous avons exposées aux nos 125 et 211.

Il se présentera trois cas :

Premier cas. p est positif. — Les racines de l'équation (6) sont réelles et de signes contraires.

Suivons, pas à pas, la *seconde méthode* du n° 125. Posons:

$$(8) \qquad Y = \varepsilon\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3}\operatorname{tg}\varphi, \qquad Z = -\varepsilon\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3}\operatorname{cotg}\varphi,$$

ε étant égal à $+1$ ou -1, suivant que q est positif ou négatif. On devra avoir :

$$Y + Z = -q,$$

ce qui donne, pour déterminer φ,

$$(9) \qquad \operatorname{tg} 2\varphi = \varepsilon\frac{2}{q}\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

formule calculable par logarithmes. Cette valeur de $\operatorname{tg} 2\varphi$ étant positive, fournira, pour φ, un angle compris entre 0° et 45°.

Pour calculer y et z, posons :

$$(10) \qquad \operatorname{tg}^3\psi = \operatorname{tg}\varphi,$$

et nous aurons :

$$y^3 = \varepsilon\left(\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{tg}\psi\right)^3, \qquad z^3 = -\varepsilon\left(\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{cotg}\psi\right)^3.$$

Les trois racines de l'équation (1) seront donc :

$$x_1 = \varepsilon\sqrt{\frac{p}{3}}(\operatorname{tg}\psi - \operatorname{cotg}\psi),$$

$$x_2 = \varepsilon\sqrt{\frac{p}{3}}(j\operatorname{tg}\psi - j^2\operatorname{cotg}\psi),$$

$$x_3 = \varepsilon\sqrt{\frac{p}{3}}(j^2\operatorname{tg}\psi - j\operatorname{cotg}\psi).$$

Comme :

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

on a, pour ces trois racines, les expressions suivantes :

$$(11) \quad \begin{cases} x_1 = -2\varepsilon\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{cotg} 2\psi, \\ x_2 = \varepsilon\sqrt{\frac{p}{3}}\left[\operatorname{cotg} 2\psi + \frac{i\sqrt{3}}{\sin 2\psi}\right], \\ x_3 = \varepsilon\sqrt{\frac{p}{3}}\left[\operatorname{cotg} 2\psi - \frac{i\sqrt{3}}{\sin 2\psi}\right]. \end{cases}$$

Ces formules sont calculables par logarithmes, car les parties réelles et imaginaires de x_2 et x_3 le sont.

En résumé, pour résoudre l'équation (1), on calcule d'abord l'angle φ, compris entre 0° et 45°, donné par la formule (9) ; puis, l'angle ψ, compris entre 0° et 45°, donné par la formule (10) ; les racines x_1, x_2, x_3 seront fournies par les égalités (11).

215. Deuxième cas. — Les racines de la résolvante sont réelles,

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0,$$

mais p est négatif. Dans ce cas, l'équation (1) n'a qu'une racine réelle. Posons, en suivant toujours la seconde méthode du n° 125, pour la résolution de l'équation (6),

$$\mathrm{Y} = -\varepsilon\sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3}\operatorname{tg}\varphi, \quad \mathrm{Z} = -\varepsilon\sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3}\operatorname{cotg}\varphi,$$

ε étant égal à $+1$ ou -1, suivant que q est positif ou négatif. On a, alors, pour déterminer φ, l'égalité

$$(12) \qquad \sin 2\varphi = \frac{2\varepsilon}{q}\sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Cette formule est calculable par logarithmes et la valeur qu'elle fournit, pour sin 2φ, est acceptable, car, puisque

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0,$$

on a :

$$\left(\frac{2}{q}\right)^2\left(-\frac{p}{3}\right)^3 < 1,$$

ce qui exprime que la valeur de $\sin^2 2\varphi$ est plus petite que 1. D'ailleurs, cette valeur de $\sin 2\varphi$ étant positive, on aura, par les tables, un angle φ compris entre 0° et 45°.

Pour calculer y et z, posons, encore,

$$\text{(13)} \qquad \operatorname{tg}^3 \psi = \operatorname{tg} \varphi,$$

et nous aurons :

$$y^3 = -\varepsilon\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\operatorname{tg}\psi\right)^3, \qquad z^3 = -\varepsilon\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\operatorname{cotg}\psi\right)^3.$$

Les trois racines de l'équation (1) seront donc :

$$x_1 = -\varepsilon\sqrt{-\frac{p}{3}}(\operatorname{tg}\psi + \operatorname{cotg}\psi),$$

$$x_2 = -\varepsilon\sqrt{-\frac{p}{3}}(j\operatorname{tg}\psi + j^2\operatorname{cotg}\psi),$$

$$x_3 = -\varepsilon\sqrt{-\frac{p}{3}}(j^2\operatorname{tg}\psi + j\operatorname{cotg}\psi).$$

Remplaçant j et j^2 par leurs valeurs et simplifiant, on a :

$$\text{(14)} \qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= -\frac{2\varepsilon}{\sin 2\psi}\sqrt{-\frac{p}{3}}, \\ x_2 &= \varepsilon\sqrt{-\frac{p}{3}}\left[\frac{1}{\sin 2\psi} + i\sqrt{3}\operatorname{cotg} 2\psi\right], \\ x_3 &= \varepsilon\sqrt{-\frac{p}{3}}\left[\frac{1}{\sin 2\psi} - i\sqrt{3}\operatorname{cotg} 2\psi\right]. \end{aligned}\right.$$

On est donc amené à faire un calcul analogue au précédent, ψ et φ étant deux angles compris entre 0° et 45°.

216. Troisième cas. — Les racines de la résolvante sont imaginaires, c'est-à-dire que l'on a :

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0.$$

Cette condition exige, nécessairement, que p soit négatif. C'est le cas où les trois racines de l'équation (1) sont réelles.

Pour calculer les racines Y et Z de l'équation (6), appliquons la méthode exposée au n° 211. Posons :

$$\mathrm{Y} = \rho\,[\cos\varphi + i\sin\varphi], \qquad \mathrm{Z} = \rho\,[\cos\varphi - i\sin\varphi].$$

Nous aurons :

$$\rho^2 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3, \qquad 2\rho\cos\varphi = -q,$$

et, par suite,

$$(15) \qquad \rho = \sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3}, \qquad \cos\varphi = \frac{-q}{2\sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

ρ et φ étant ainsi calculés, par ces formules calculables par logarithmes, on aura :

$$y^3 = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad z^3 = \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi).$$

On est ainsi amené à extraire les racines cubiques de deux imaginaires mises sous forme trigonométrique. On a donc, pour y et z, trois valeurs (n° 200) et il faut associer les valeurs conjuguées :

$$y_1 = \sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right), \qquad z_1 = \sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{3} - i\sin\frac{\varphi}{3}\right),$$

$$y_2 = \sqrt[3]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120^\circ\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{3} + 120^\circ\right)\right],$$

$$z_2 = \sqrt[3]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120^\circ\right) - i\sin\left(\frac{\varphi}{3} + 120^\circ\right)\right],$$

$$y_3 = \sqrt[3]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 240^\circ\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{3} + 240^\circ\right)\right],$$

$$z_3 = \sqrt[3]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 240^\circ\right) - i\sin\left(\frac{\varphi}{3} + 240^\circ\right)\right].$$

Finalement, les trois racines réelles sont données par les formules suivantes, en remplaçant ρ par sa valeur tirée de (15) :

$$(16) \qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3}, \\ x_2 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120^\circ\right), \\ x_3 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 240^\circ\right). \end{aligned}\right.$$

En résumé, on calculera φ par la seconde formule (15), qui fournira un angle φ compris entre 0° et 180°. φ ayant été calculé, les formules (16) donneront les trois racines par des calculs logarithmiques.

Il est bon de remarquer que la formule (15) donne bien, pour cos φ, une valeur acceptable. Car, puisque

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0 ,$$

on a :

$$\frac{\left(\frac{q}{2}\right)^2}{\left(-\frac{p}{3}\right)^3} < 1 ;$$

ce qui exprime, précisément, que la valeur de $\cos^2\varphi$ est plus petite que 1.

217. — Les méthodes de résolution précédentes auraient pu être présentées d'une façon directe, sans les rattacher, comme nous l'avons fait, à la résolution algébrique. Cette nouvelle manière est évidemment moins naturelle que la précédente. Comme exemple, nous l'exposerons pour le troisième cas, celui où toutes les racines de l'équation (1) sont réelles.

Considérons l'équation du troisième degré à laquelle on est conduit lorsqu'on veut résoudre le problème de la trisection, connaissant le cosinus de l'arc (n° 193).

D'après ce que nous avons vu, si on pose

$$\cos\frac{\varphi}{3} = y ,$$

y est racine de l'équation du troisième degré

$$4y^3 - 3y - \cos\varphi = 0 .$$

Les trois racines de cette équation sont :

$$\cos\frac{\varphi}{3}, \qquad \cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120°\right), \qquad \cos\left(\frac{\varphi}{3} + 240°\right);$$

elles sont donc connues dès qu'on connaît φ.

Posons, dans cette équation,

$$y = \frac{x}{k}, \qquad \text{ou} \qquad x = ky ,$$

k étant un nombre arbitraire. Elle devient, en multipliant les deux membres par k^3 et divisant par 4,

$$(1) \qquad x^3 - \frac{3}{4}k^2x - \frac{1}{4}k^3\cos\varphi = 0 .$$

Nous obtenons donc, ainsi, une équation du troisième degré dont nous connaissons les trois racines qui sont :

$$k \cos\frac{\varphi}{3}, \quad k \cos\left(\frac{\varphi}{3}+120^\circ\right), \quad k \cos\left(\frac{\varphi}{3}+240^\circ\right).$$

Ceci posé, soit

$$(2) \qquad x^3+px+q=0$$

une équation du troisième degré, ramenée à la forme simplifiée et ayant, par hypothèse, trois racines réelles, c'est-à-dire telle que :

$$(3) \qquad \left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2<0\,.$$

Si l'on peut déterminer un nombre k et un angle φ tels que les équations (1) et (2) soient identiques, puisqu'on connaît les racines de l'équation (1), on aura, par là même, celles de l'équation (2). Or, cette identification est possible. Posons, en effet,

$$(4) \qquad \frac{3}{4}k^2=-p\,, \qquad \frac{1}{4}k^3\cos\varphi=-q\,.$$

La première égalité (4) donne, pour k, des valeurs réelles, car la condition (3) ne peut avoir lieu que si p est négatif. On en tire :

$$k=\pm 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\,.$$

Prenons, par exemple, le signe (+) :

$$(5) \qquad k=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\,.$$

La valeur de k étant ainsi déterminée, la seconde équation (4) donne :

$$2\sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3}\cos\varphi=-q$$

ou

$$(6) \qquad \cos\varphi=-\frac{q}{2\sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3}}\,.$$

Cette égalité fournit bien pour $\cos\varphi$ une valeur acceptable, car la condition (3), qui est vérifiée par hypothèse, s'écrit :

$$\frac{\left(\frac{q}{2}\right)^2}{\left(-\frac{p}{3}\right)^3} < 1,$$

ce qui exprime que la valeur de $\cos^2\varphi$ est plus petite que 1.

En résumé, pour résoudre l'équation (2) on calculera l'angle φ, compris entre 0° et 180°, vérifiant l'égalité (6). Cet angle étant calculé, les trois racines de l'équation (2) seront :

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} x_1 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3}, \\ x_2 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+120^\circ\right), \\ x_3 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+240^\circ\right). \end{aligned}\right.$$

L'équation (6) qui détermine φ est *identique* à la seconde équation (15) du numéro précédent, et les formules (7) sont identiques aux formules (16) de ce numéro. On est donc ramené à faire exactement les *mêmes calculs* qu'au n° 216.

REMARQUE. — Nous avons pris pour k la valeur positive. Il est facile de vérifier qu'en prenant pour k la détermination négative, on aurait retrouvé les mêmes racines. Ceci revient, en effet, à changer k en $-k$, $\cos\varphi$ en $-\cos\varphi$, par suite, φ en $\varphi+180°$.

Les 3 racines ont, alors, pour expression :

$$\begin{aligned} -2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+60^\circ\right) &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+240^\circ\right), \\ -2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+180^\circ\right) &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3}, \\ -2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+300^\circ\right) &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+120^\circ\right). \end{aligned}$$

On retrouve donc bien les trois mêmes racines ; ce qui devait avoir lieu, puisque l'équation (2) n'a que trois racines. Il y aura avantage à prendre pour k cette valeur négative lorsque q est positif, afin d'avoir, pour $\cos\varphi$, une valeur positive.

Il serait tout aussi aisé de vérifier que les valeurs des racines ne changent pas si, au lieu de prendre pour l'angle φ la détermination comprise entre 0°, et 180°, on prend une autre détermination vérifiant la relation (6).

218. Exemple numérique. — Résoudre l'équation

$$x^3 - 21{,}648x + 7{,}344 = 0.$$

On a, ici,

$$\frac{p}{3} = -7{,}216 \qquad \frac{q}{2} = 3{,}672,$$

et, comme il est facile de le vérifier,

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0 .$$

Les trois racines sont réelles. Nous appliquerons donc la méthode des nos 216 et 217.

q étant positif, prenons le signe — devant k ;

$$k = -2\sqrt{-\frac{p}{3}}, \qquad \cos\varphi = \frac{\frac{q}{2}}{\sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Donc :

$$k = -2\sqrt{7{,}216}, \qquad \cos\varphi = \frac{3{,}672}{\sqrt{(7{,}216)^3}};$$

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= k\cos\frac{\varphi}{3}, \\ x_2 &= k\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120^\circ\right), \\ x_3 &= k\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 240^\circ\right). \end{aligned}\right.$$

1° *Calcul de* φ.

$$\log\cos\varphi = \log 3{,}672 + \frac{3}{2}\,\mathrm{colog}\, 7{,}216.$$

$$\begin{aligned} \log 3{,}672 &= 0{,}5649027 \\ \frac{3}{2}\,\mathrm{colog}\, 7{,}216 &= \bar{2}{,}7125553 \\ \hline \log\cos\varphi &= \bar{1}{,}2774580 \end{aligned}$$

pour.....	$\bar{1},2775549$	$79^\circ\ 4'\ 40''$	$\Delta = 1092.$
	diff. $= -969$		
pour.....	$-873,6$	$8''$	
	diff. $= -\ 95,4$		
pour.....	$-\ 87,36$	$0'',8$	
	diff. $=\ 8,04$		
pour.....	$7,63$	$0'',07$	

$$\varphi = 79^\circ\ 4'\ 48'',87$$

$$\frac{\varphi}{3} = 26^\circ\ 21'\ 36'',29,$$

$$\frac{\varphi}{3} + 120^\circ = 146^\circ\ 21'\ 36'',29 = 180^\circ - [33^\circ\ 38'\ 23'',71],$$

$$\frac{\varphi}{3} + 240^\circ = 266^\circ\ 21'\ 36'',29 = 180^\circ + 86^\circ\ 21'\ 36'',29.$$

2° *Calcul de* $\log |k|$.

$$\log 2 = 0,3010300$$

$$\frac{1}{2}\log 7,216 = 0,4291482$$

$$\log |k| = 0,7301782.$$

3° *Calcul de* x_1

On a :

$$x_1 = k\cos(26^\circ\ 21'\ 36'',29).$$

pour $26^\circ\ 21'\ 40''$	$\bar{1},9523145$		$\Delta = 104.$
pour..... $-\ 3''$	$31,2$		
pour..... $-\ 0'',7$	$7,28$		
pour..... $-\ 0'',01$	$0,104$		

$$\log\cos(26^\circ\ 21'\ 36'',29) = \bar{1},9523184$$

$$\log |k| = 0,7301782$$

$$\log |x_1| = 0,6824966$$

pour...	6824880	48138	$\Delta = 91.$
diff. $=$	86		
pour...	$81,9$	$0,9$	
diff. $=$	$4,1$		
pour...	$3,64$	$0,04$	

$$|x_1| = 4,813894,$$

$$x_1 = -\ 4,813894.$$

4° Calcul de x_2

On a :

$$x_2 = |k| \cos (33° \, 38' \, 23'',71).$$

pour 33° 38′ 30″	$\bar{1}$,9203939	$\Delta = 140.$
pour..... — 6″	84	
pour..... — 0″2	2,8	
pour..... — 0″09	1,26	

log cos (33° 38′ 23″,71) = $\bar{1}$,9204027
log | k | = 0,7301782

log x_2 = 0,6505809

pour.....	6505795	44728	$\Delta = 97.$
diff. =	14		
pour.....	9,7	0,1	
diff. =	4,3		
pour.....	3,9	0,04	

$$x_2 = 4,472814.$$

5° Calcul de x_3

On a :

$$x = |k| \cos (86° \, 21' \, 36'',29).$$

pour 86° 21′ 40″	$\bar{2}$,8025542	$\Delta = 3312.$
pour..... — 3″	993,6	
pour..... — 0″,7	231,84	
pour..... — 0″,01	3,312	

log cos (86° 21′ 36″,29) = $\bar{2}$,8026771
log | k | = 0,7301782

log x_3 = $\bar{1}$,5328553

pour.....	5328435	34107	$\Delta = 128.$
diff. =	118		
pour.....	115	0,9	

$$x_3 = 0,341079.$$

Vérification. — Comme on a :

$$|x_1 x_2 x_3| = q,$$

on doit avoir :

$$log \, |x_1| + log \, x_2 + log \, x_3 = log \, q.$$

Or,

$$log\ q = 0{,}8659327,$$

et on trouve :

$$log\ |x_1| + log\ x_2 + log\ x_3 = 0{,}8659328.$$

En résumé, l'équation a trois racines, une négative et deux positives, qui sont :

$$x_1 = -\ 4{,}813894,$$
$$x_2 = \quad 4{,}472814,$$
$$x_3 = \quad 0{,}341079.$$

Comme seconde vérification, on doit avoir

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

et on trouve :

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\ 0{,}000001.$$

EXERCICES

102. Résoudre, trigonométriquement, les équations du second degré suivantes :

$$x^2 - x + 1 = 0,$$
$$3x^2 + 2{,}205x + 4{,}713 = 0.$$

103. Résoudre, trigonométriquement, les équations du troisième degré suivantes :

$$5x^3 - 25x + 6 = 0,$$
$$x^3 + 4{,}7152x - 3{,}8156 = 0,$$
$$2x^3 + 3{,}506x^2 - 2{,}713x + 1{,}075 = 0,$$
$$x^3 - 3{,}7021x + 16{,}7153 = 0,$$
$$4512x^3 - 20315x + 2713 = 0.$$

104. Résoudre l'équation du troisième degré

$$x^3 - \alpha x + \beta = 0,$$

sachant que :

1° $log\ \alpha = 1{,}7153702$, $\quad log\ \beta = 2{,}8137061$;
2° $log\ \alpha = 2{,}3020312$, $\quad log\ \beta = 0{,}7152053$;
3° $log\ \alpha = \bar{1}{,}4738171$, $\quad log\ \beta = \bar{2}{,}0456789$.

105. Exposer, directement, les méthodes de résolution de l'équation

$$x^3 + px + q = 0,$$

dans les deux cas où il n'y a qu'une racine réelle.

On posera, pour cela,

$$x = \lambda\,[\mathrm{tg}\ \varphi \pm \mathrm{cotg}\ \varphi]$$

et on déterminera λ et φ de façon à obtenir des formules calculables par logarithmes.

FIN

ERRATA

Pages :	*Lignes :*	*Au lieu de :*	*Lire :*
121,	16,	Cos 15°	cos 15°
121,	17,	Sin 15°	sin 15°
193,	13,	AH =	BH =
193,	5, par en bas,	AH =	BH =
216,	13, colonne de droite,	*log* cotg $\frac{A}{2} =$	*log* cotg $\frac{A}{2} =$
216,	20 à 23, colonne de gauche,	*pour* ..... 6″ *pour* ..... 0″,8 *pour* ..... 0″,07	*pour* ... — 6″ *pour* ... — 0″,8 *pour* ... — 0″,07
224,	1, par en bas,	tg $\begin{matrix}A\\2\end{matrix}$ et tg $\begin{matrix}B\\2\end{matrix}$	tg $\frac{A}{2}$ et tg $\frac{B}{2}$
224,	10, par en bas,	$\begin{matrix}1\\h\end{matrix}$	$\frac{1}{h}$
269,	9,	*des arcs* $\begin{matrix}a\\3\end{matrix}$,	*des arcs* $\frac{a}{3}$,
289,	11,	$a^{\frac{1}{m}}\left[\cos\frac{2k\pi}{m}\right] + i\sin\frac{2k\pi}{m}.$	$a^{\frac{1}{m}}\left[\cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m}\right].$
309,	1, par en bas,	$\left(\frac{q^2}{2}\right) + \left(\frac{p^3}{3}\right) > 0.$	$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0.$